详细解答

# STEP II 2011，第 11 题

力学 · 三维空间中的平衡

**STEP II 2011，第 11 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s2-q11

## 关键思路

一切都建基于为每条绳写出一个沿绳方向的单位向量（unit vector）。每个单位向量都可分拆为铅垂部分和水平部分：铅垂部分由绳与铅垂线所成的角决定；水平部分则由 $O$ 指向绳在天花板上的端点，并由该方向与 $OA$ 所成的角决定。一旦知道三个单位向量，平衡（equilibrium）条件便只是三条纯量方程，$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 各一条。

## 解答

我们把 $P$ 视为质点（particle），并把绳视为轻而不可伸长（light and inextensible），因此每条绳都以沿绳方向的力把 $P$ 拉向其固定端。取 $O$ 为原点，$\mathbf{j}$ 沿 $OA$，$\mathbf{k}$ 铅垂向上；$\mathbf{i}$ 为水平方向，并垂直于 $OA$。

先处理三角学。由于 $\tan\theta = \sqrt{2}$，以 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ 为边的直角三角形给出

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

由于 $\tan\phi = \frac{1}{4}\sqrt{2}$，两直角边为 $4, \sqrt{2}$，斜边为 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$，所以

$$\sin\phi = \frac{1}{3}, \qquad \cos\phi = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

### 第 (i) 部分

与铅垂线成角 $\alpha$ 的绳，其单位向量（由 $P$ 指向天花板）的铅垂分量为 $\cos\alpha$，水平部分的长度为 $\sin\alpha$。

对于 $PB$，$\alpha = 90^\circ - \theta$，所以铅垂分量为 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，而水平部分的长度为 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$。

水平部分沿 $OB$ 方向（因为 $O$ 在 $P$ 的正上方），与 $\mathbf{j}$ 成角 $90^\circ+\theta$。与 $\mathbf{j}$ 成角 $90^\circ+\theta$ 的水平单位向量为 $\pm\sin(90^\circ+\theta)\,\mathbf{i}+\cos(90^\circ+\theta)\,\mathbf{j}=\pm\cos\theta\,\mathbf{i}-\sin\theta\,\mathbf{j}$。我们选取 $\mathbf{i}$ 的指向，使 $B$ 位于 $OA$ 的负 $\mathbf{i}$ 一侧；题目所要求的形式决定了这个选择。于是沿 $PB$ 的单位向量的水平部分为

$$\tfrac{1}{\sqrt{3}}(-\cos\theta\,\mathbf{i}-\sin\theta\,\mathbf{j})=\tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{j}\right)=-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j}.$$

加上铅垂分量，沿 $PB$ 方向的单位向量为

$$-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j}+\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k},$$

正如所求。（验算：$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{3}=1$。）

**第 (ii) 部分**

用同样的方法可得另外两条绳的单位向量。

绳 $PA$：与铅垂线成 $30^\circ$，水平部分沿 $\mathbf{j}$：

$$\mathbf{e}_A=\tfrac{1}{2}\,\mathbf{j}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{k}.$$

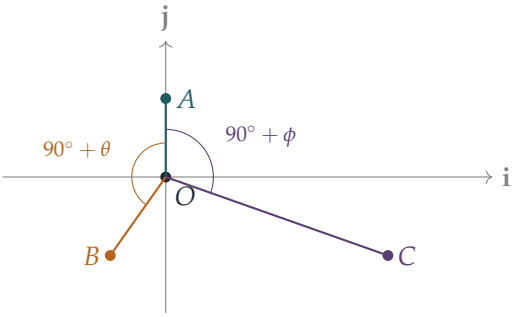
绳 $PC$：与铅垂线成 $60^\circ$，所以铅垂分量为 $\frac{1}{2}$，水平长度为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$。方向 $OC$ 与 $\mathbf{j}$ 成角 $90^\circ+\phi$，所以其水平单位向量为 $\pm\cos\phi\,\mathbf{i}-\sin\phi\,\mathbf{j}$。

? **想一想** $C$ 是在 $OA$ 与 $B$ 相同的一侧，还是在相反的一侧?

图中显示的是相反一侧，而且平衡条件本身亦要求如此。$PA$ 中的张力（tension）没有 $\mathbf{i}$ 分量，而 $PB$ 中的张力则有负分量。若 $PC$ 也有负的 $\mathbf{i}$ 分量，便没有任何力能与它们平衡。所以符号为 $+$，且

$$\mathbf{e}_C=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{j}\right)+\tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}=\tfrac{\sqrt{6}}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{3}}{6}\,\mathbf{j}+\tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}.$$

下面的天花板平面图（取 $OP=1$，故 $OA=\tan30^\circ$、$OB=\cot\theta$、$OC=\tan60^\circ$）显示了各点的布局。



因此作用于 $P$ 的力为

$$\begin{aligned}\text{张力，绳}PA:&\quad T\left(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{j}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{k}\right),\\ \text{张力，绳}PB:&\quad U\left(-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j}+\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k}\right),\\ \text{张力，绳}PC:&\quad V\left(\tfrac{\sqrt{6}}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{3}}{6}\,\mathbf{j}+\tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}\right),\\ \text{重量:}&\quad -W\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

**第 (iii) 部分**

$P$ 处于平衡状态，所以四个力之和为零。我们逐一取分量。

$\mathbf{i}$：

$$-\tfrac{1}{3}U+\tfrac{\sqrt{6}}{3}V=0\quad\Longrightarrow\quad U=\sqrt{6}\,V,$$

正如所求。

$\mathbf{j}$：

$$\tfrac{1}{2}T-\tfrac{\sqrt{2}}{3}U-\tfrac{\sqrt{3}}{6}V=0.$$

代入 $U=\sqrt{6}V$，并利用 $\sqrt{2}\sqrt{6}=2\sqrt{3}$：

$$\tfrac{1}{2}T=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}V+\tfrac{\sqrt{3}}{6}V=\tfrac{5\sqrt{3}}{6}V\quad\Longrightarrow\quad T=\tfrac{5\sqrt{3}}{3}V.$$

$\mathbf{k}$：

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}T+\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}U+\tfrac{1}{2}V=W.$$

代入以上两个结果，

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{5\sqrt{3}}{3}V+\tfrac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{3}}V+\tfrac{1}{2}V=\tfrac{5}{2}V+2V+\tfrac{1}{2}V=5V=W.$$

因此

$$V=\frac{W}{5},\qquad U=\frac{\sqrt{6}\,W}{5},\qquad T=\frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{W}{5}=\frac{W}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\,W}{3}.$$

三者皆为正，所以每条绳都是拉紧的（taut），与模型一致。

## 验算

- 每个单位向量的长度都是 1：对于 $\mathbf{e}_C$，$\frac{6}{9}+\frac{3}{36}+\frac{1}{4}=1$。
- $\mathbf{e}_A$ 与 $\mathbf{e}_C$ 的水平部分之间的夹角，其余弦为 $-\frac{1}{3}=-\sin\phi$，所以夹角为 $90^\circ+\phi\approx 109.47^\circ$，理应如此。
- 取 $W=1$：$T\approx 0.5774$、$U\approx 0.4899$、$V=0.2$。于是铅垂分量 $0.5774\times 0.8660+0.4899\times 0.8165+0.2\times 0.5=0.5+0.4+0.1=1$ 与重量平衡。留意这个整齐的分配：$PA$、$PB$、$PC$ 分别承受重量的 $\frac{1}{2}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{1}{10}$。

## 常见错误

- 处理绳 $PB$ 时混淆 sin 与 cos：它与铅垂线所成的角是 $90^\circ - \theta$，所以其铅垂分量为 $\sin\theta$，而不是 $\cos\theta$。
- 把 $C$ 放在 $OA$ 与 $B$ 相同的一侧。这样 **i** 方程便会迫使张力为负（即 $V = -\frac{1}{3}W$），而绳是不可能有负张力的。
- 忘记 $\cos(90^\circ + \phi) = -\sin\phi$，以致 $\mathbf{e}_B$ 与 $\mathbf{e}_C$ 的 **j** 分量符号出错。

## STEP 之外

三条沿三个独立方向的绳使系统成为*静定*（statically determinate）：平衡方程组成一个 $3 \times 3$ 线性方程组，并有唯一解。若再加第四条绳，单靠静力学便不能确定各张力，工程师必须引入绳的弹性。这正是结构分析（structural analysis）以及有关秩（rank）与零空间（null space）的线性代数的起点。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）就是以这种方式把力当作向量处理，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）则解释这类方程组何时有唯一解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。