详细解答

STEP II 2011，第 10 题

力学 · 抛体与冲量

STEP II 2011，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s2-q10

关键思路

由于 R 始终位于 P 的正下方，两颗质点在整个过程中水平速度相同，因此弦线保持铅垂，只需考虑铅垂方向的运动。当 P 恰好在平面上方 $\frac{1}{2}H$ 时，弦线绷紧（taut）；此时的急拉是一个铅垂方向的冲量（impulse），把 P 向上的动量（momentum）分给 R。此后两颗质点速度完全相同，因此作为同一个抛射体（projectile）一起飞行，直至 R 落地。

解答

最大高度

把质点视为只受重力作用的点。速度的铅垂分量为 $u\sin\theta - gt$，在最高点时为零。在铅垂方向使用 $v^2 = u^2 + 2as$，末铅垂速率为 0，

$$0 = u^2\sin^2\theta - 2gH \qquad \Longrightarrow \qquad H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

值得记下以备后用：由此得 $u\sin\theta = \sqrt{2gH}$。

弦线何时绷紧

以 O 为原点，x 为水平方向，y 为铅垂向上方向。质点 P 的水平速度始终为 $u\cos\theta$。要令 R 保持在 P 的正下方，R 必须以速率 $u\cos\theta$ 射出；由于平面光滑（smooth），R 便以这个恒定速率滑行。因此弦线始终铅垂，而距离 PR 就是 P 的高度：

$$y_P = u\sin\theta\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 = \sqrt{2gH}\, t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

当 y_P 首次达到 $\frac{1}{2}H$ 时，弦线绷紧（这必定会发生，因为 P 上升至 $H > \frac{1}{2}H$）：

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - \sqrt{2gH}\,t + \tfrac{1}{2}H = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{\sqrt{2gH} \pm \sqrt{2gH - gH}}{g} = (\sqrt{2} \pm 1)\sqrt{\frac{H}{g}}.$$

较小的根是首次到达的时刻，因此弦线在以下时间后绷紧：

$$t_1 = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{H/g},$$

正如所求。（较大的根是 P 下降时再次经过高度 $\frac{1}{2}H$ 的时刻。）

急拉

在 t_1 时，P 的铅垂速度为

$$u\sin\theta - gt_1 = \sqrt{2gH} - (\sqrt{2} - 1)\sqrt{gH} = \sqrt{gH},$$

方向向上，而 R 没有铅垂速度。两者的水平速度均为 $u\cos\theta$。

> ? **想一想** 在弦线急拉的一瞬间，有哪些冲量作用，方向如何?

弦线铅垂，因此张力（tension）冲量 J 是铅垂的：对 P 向下，对 R 向上。平面光滑，只能向上推 R；由于 R 被向上拉离平面，平面不施加任何冲量。所以水平速度不变，而在铅垂方向上两颗质点的总动量守恒。弦线不可伸长（inextensible）且保持绷紧，因此紧接急拉之后，P 和 R 有相同的铅垂速度 w。两者质量同为 m，

$$m\sqrt{gH} + m\cdot 0 = 2mw \qquad\Longrightarrow\qquad w = \tfrac{1}{2}\sqrt{gH}.$$

距离 D

急拉之后，若张力为零，P 和 R 速度相同，加速度亦同为向下的 g。因此它们如同两个相同的抛射体，相隔固定距离 $\frac{1}{2}H$ 运动：弦线恰好保持绷紧而张力为零，这是自洽的。R 从高度 0 以向上速度 w 出发，因此在以下时间后回到平面：

$$t_2 = \frac{2w}{g} = \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

所以 R 运动的总时间为

$$t_1 + t_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{H}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{u^2\sin^2\theta}{g^2}} = \frac{u\sin\theta}{g},$$

而在整段时间内 R 以 $u\cos\theta$ 水平移动。因此

$$D = u\cos\theta\cdot\frac{u\sin\theta}{g} = \frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{u^2\sin 2\theta}{2g}.$$

这恰好是 P 单独运动时射程（range）的一半：R 落地的时刻，正是没有弦线时 P 到达其轨迹最高点的时刻。

$D = H$ 的情况

设

$$\frac{u^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$$

并除以 $u^2 \sin\theta/g$（它不为零，因为质点要上升，须有 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$），得 $\cos\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$，所以

$$\tan\theta = 2.$$

验算

- t 的两个根之积为 H/g，之和为 $2\sqrt{2H/g}$，即 P 到达最高点再回到平面所需的时间；根据对称性，理应如此。
- 以随机的 u 和 θ 进行数值模拟（逐步推进 P 的飞行直至其高度为 $\frac{1}{2}H$，施加急拉，再逐步推进直至 R 落地），结果与 t_1 和 D 吻合；例如 $u = 18.11$、$\theta = 0.711$、$g = 9.8$，两种方法均得 $D \approx 16.543$。
- 取 $\tan\theta = 2$、$u = 10$、$g = 9.8$：$D = H \approx 4.082$。

常见错误

- 取了较大的根 $(\sqrt{2}+1)\sqrt{H/g}$，那是 P 下降时再次经过高度 $\frac{1}{2}H$ 的时刻。
- 忘记 R 在急拉前滑行的时间 t_1，只用急拉后的飞行来计算 D。
- 在急拉时使用能量守恒：不可伸长的弦线急拉绷紧时会损失动能；只有动量守恒。

STEP 之外

急拉之后，这对质点的行为与位于其质心（centre of mass）的单一质点完全相同：内力（这里是张力）永远不会改变系统质心的运动。这是大学一年级课程中质点系及刚体（rigid body）力学的起点，而像这题一样的冲击约束亦以同样方法处理。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对这些概念有仔细的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。