详细解答

STEP II 2011，第 1 题

纯数学 · 含平方根的方程

STEP II 2011，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s2-q1

关键思路

两部分都涉及平方根之和。只要找出定义域（domain）、端点的值和对称性（symmetry），这些函数的图像便很容易理解。在第 (i) 部分，图像给出一个不等式（inequality）：曲线永远不会低于某个高度，而直线只能在一点达到该高度，所以根本不用解方程。在第 (ii) 部分，图像告诉我们应该预期有多少个根，从而让我们剔除平方时引入的多余根。

解答

第 (i) 部分

设 $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{3+x}$。两个平方根只有在 $1-x\geq 0$ 及 $3+x\geq 0$ 时才是实数，所以定义域为 $-3\leq x\leq 1$。在两个端点，$f(-3)=2+0=2$ 及 $f(1)=0+2=2$。

令 $x=-1+t$，得 $f=\sqrt{2-t}+\sqrt{2+t}$。以 $-t$ 代替 t 时此式不变，所以曲线关于 $x=-1$ 对称。求导数（derivative），

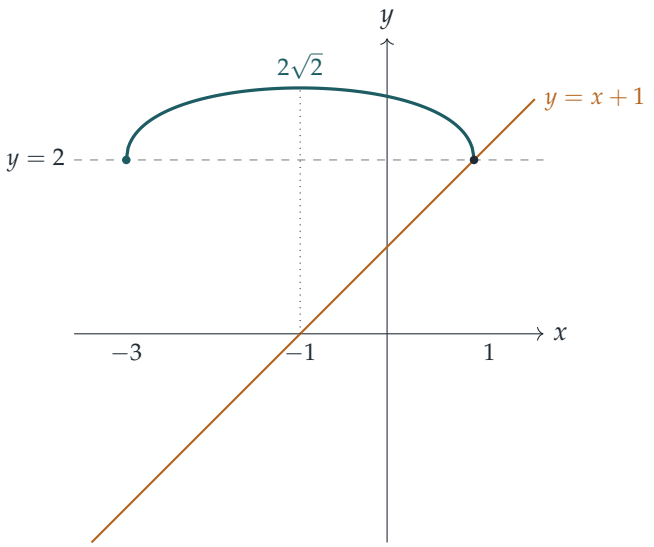
$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}+\frac{1}{2\sqrt{3+x}},$$

它只在 $1-x=3+x$，即 $x=-1$ 时为零，此时 $f(-1)=2\sqrt{2}$。当 $x<-1$ 时，$3+x<1-x$，所以 $f'(x)>0$；当 $x>-1$ 时，$f'(x)<0$。因此 f 由 2 上升至极大值（maximum）$2\sqrt{2}$，再回落至 2。在 $x=-3$ 附近，f' 的第二项趋于无限大，所以曲线以垂直方向离开 $(-3,2)$；同理，它亦以垂直方向到达 $(1,2)$。f 的每一项都是凹函数（concave），所以整条曲线是一顶平滑的“帽子”。

要看出最小值，更简洁的方法是平方：

$$f(x)^2=(1-x)+(3+x)+2\sqrt{(1-x)(3+x)}=4+2\sqrt{(1-x)(3+x)}\ \geq\ 4,$$

所以在整个定义域上 $f(x) \geq 2$，等号只在 $x = -3$ 及 $x = 1$ 时成立。



现在引入直线 $y = x + 1$。在定义域上 $x \leq 1$，所以 $x + 1 \leq 2$，等号只在 $x = 1$ 时成立。另一方面 $f(x) \geq 2$。因此 $f(x) = x + 1$ 迫使两边都等于 2，而这只在 $x = 1$ 时发生。验证：$\sqrt{0} + \sqrt{4} = 2 = 1 + 1$。所以恰好有一个实数值满足方程：

$$x = 1.$$

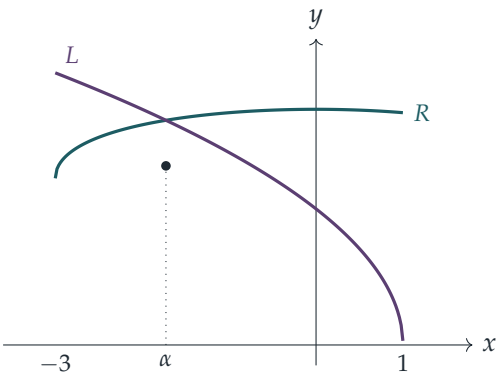
（在 $[-3, 1]$ 以外，左边没有定义，所以没有其他候选值。）

第 (ii) 部分

同样，我们需要 $x \leq 1$、$x \geq -3$ 及 $x \leq 3$，所以定义域为 $[-3, 1]$。比较

$$L(x) = 2\sqrt{1 - x} \qquad \text{和} \qquad R(x) = \sqrt{3 + x} + \sqrt{3 - x}.$$

L 严格递减（strictly decreasing），由 $L(-3) = 4$ 降至 $L(1) = 0$。R 的形状与第 (i) 部分的曲线相同：它关于 $x = 0$ 对称（互换 x 与 $-x$），$R(\pm 3) = \sqrt{6}$，极大值为 $R(0) = 2\sqrt{3}$，在 $[-3, 0]$ 上递增，在 $[0, 3]$ 上递减。在我们的定义域上，只看到由 $x = -3$ 至 $x = 1$ 的一段，其中 $R(1) = 2 + \sqrt{2}$。



在 $x=-3$，$L=4>\sqrt{6}=R$；在 $x=0$，$L=2<2\sqrt{3}=R$。在 $[-3,0]$ 上，L 严格递减而 R 递增，所以 $L-R$ 严格递减，并恰好变号一次。在 $[0,1]$ 上，$L\le 2$ 而 $R\ge 2+\sqrt{2}$，所以两者不相交。因此方程**恰好有一个**实数解，且它位于 $-3<x<0$。

要求出这个解，就要平方。两边都是非负的，所以平方不会损失任何东西：

$$\begin{aligned} & 4(1-x)=(3+x)+(3-x)+2\sqrt{9-x^2} \\ \iff\quad & -1-2x=\sqrt{9-x^2}. \end{aligned}$$

想一想 再次平方时，新方程的哪些解才是真正的解?

右边是平方根，所以它 ≥ 0；真正的解必须满足 $-1-2x\ge 0$，即 $x\le -\frac{1}{2}$。在这个条件下，平方是可逆的：

$$1+4x+4x^2=9-x^2 \iff 5x^2+4x-8=0 \iff x=\frac{-2\pm 2\sqrt{11}}{5}.$$

根 $\frac{-2+2\sqrt{11}}{5}\approx 0.93$ 违反 $x\le -\frac{1}{2}$，所以我们舍去它。另一个根 $\frac{-2-2\sqrt{11}}{5}\approx -1.73$ 满足条件，并位于 $[-3,0]$ 内，正如图像所预测。所以唯一解是

$$x=-\frac{2+2\sqrt{11}}{5}.$$

验算

- 在 $x\approx -1.72665$：$2\sqrt{1-x}\approx 3.3025$，而 $\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}\approx 1.1284+2.1741\approx 3.3025$。两边相符。
- 被舍去的根 $x\approx 0.92665$ 给出 $L\approx 0.542$，但 $R\approx 3.42$。它其实是 $\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}=2\sqrt{1-x}$ 的解，而这条方程平方后得出同一结果。
- 在第 (i) 部分，$f(-1)=2\sqrt{2}\approx 2.83>0=(-1)+1$，与直线除了在 $(1,2)$ 外处处位于曲线下方一致。

常见错误

- 在第 (i) 部分用平方和代数方法硬解。这既繁复，又可能引入增根（extraneous root），而界 $f \geq 2 \geq x+1$ 却能立即解决问题。
- 保留 $5x^2+4x-8=0$ 的两个根。每一步平方都需要附带其符号条件，这里是 $-1-2x \geq 0$。
- 忘记定义域：对于 $x>1$，两条方程都没有意义。

STEP 之外

第 (i) 部分是分析（analysis）中一个常见技巧的小例子：与其解 $f(x)=g(x)$，不如证明 $f \geq c \geq g$，再看等号何时成立。第 (ii) 部分在求出任何根之前，就结合介值定理（intermediate value theorem）与单调性（monotonicity）来数算根的个数，这正是大学第一门分析课程中证明存在性与唯一性（existence and uniqueness）的方法。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对连续性（continuity）与介值定理有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。