详细解答

STEP I 2011，第 9 题

力学 • 抛体运动

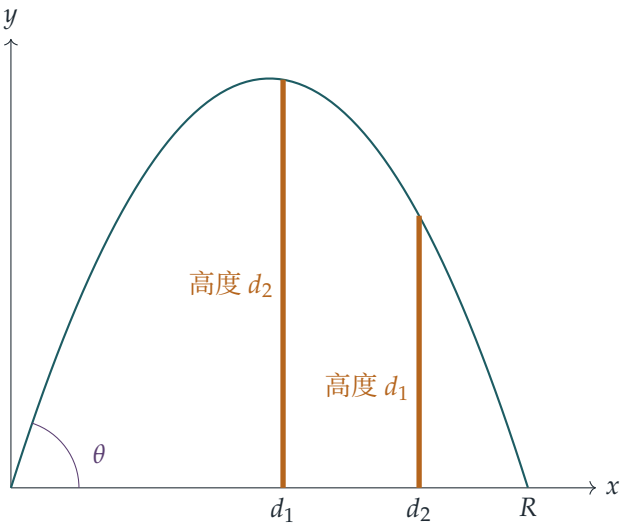
> **STEP I 2011，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q9

关键思路

把轨迹（trajectory）写成单一方程 $y = x\tan\theta - ax^2$，其中常数 a 把 g、速率和角度合并在一起。“刚好越过”一幅墙，意思是路径经过墙顶的角位，所以每幅墙都给出一条关于两个未知数 $\tan\theta$ 和 a 的线性方程（linear equation）。解这对方程便得出角度，而射程（range）就只是 $y = 0$ 的另一个根（root）。

解答

我们把质点模型化为只受重力作用而运动的一点（不计空气阻力（air resistance）），从原点 O 以速率 u、仰角 θ 抛出，x 为水平方向，y 为竖直向上方向。两幅墙的高度不同，因此我们假设 $d_1 \neq d_2$。



（图中采用 $d_1 < d_2$；但代数推导并不依赖哪一个较大。）

轨迹

在时间 t 时，$x = ut\cos\theta$ 及 $y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$。消去 $t = x/(u\cos\theta)$，得

$$y = x\tan\theta - ax^2, \qquad \text{其中} a = \frac{g}{2u^2\cos^2\theta} > 0.$$

设 $T = \tan\theta$。质点刚好越过每幅墙，所以它经过墙顶 (d_1, d_2) 和 (d_2, d_1)：

$$d_2 = d_1 T - ad_1^2, \tag{1}$$
$$d_1 = d_2 T - ad_2^2. \tag{2}$$

求 $\tan\theta$

为了消去 a，把 (1) 乘以 d_2^2，把 (2) 乘以 d_1^2，使两条式中的 a 项都是 $ad_1^2d_2^2$：

$$d_2^3 = d_1d_2^2\,T - ad_1^2d_2^2,$$
$$d_1^3 = d_1^2d_2\,T - ad_1^2d_2^2.$$

相减，得

$$d_2^3 - d_1^3 = d_1d_2(d_2 - d_1)\,T.$$

? **想一想** 我们可以除以 $d_2 - d_1$ 吗?

可以：两幅墙的高度 d_2 和 d_1 不同，所以 $d_1 \neq d_2$。（若两者相等，就只有一幅墙，而单一个点无法同时确定 θ 和 u。）由于 $d_2^3 - d_1^3 = (d_2 - d_1)(d_2^2 + d_1d_2 + d_1^2)$，除以 $d_1d_2(d_2 - d_1)$

便得

$$\tan\theta = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2},$$

此即所求。

射程

质点落地之处满足 $y = 0$ 且 $x \neq 0$，即 $x = T/a$。因此我们也需要求出 a。把 (1) 除以 d_1，(2) 除以 d_2，得

$$\frac{d_2}{d_1} = T - ad_1, \qquad \frac{d_1}{d_2} = T - ad_2.$$

以第二式减第一式，消去 T：

$$a(d_2 - d_1) = \frac{d_2}{d_1} - \frac{d_1}{d_2} = \frac{(d_2 - d_1)(d_2 + d_1)}{d_1 d_2}, \qquad \text{所以} \qquad a = \frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2},$$

这里同样用到 $d_1 \neq d_2$。因此射程为

$$R = \frac{T}{a} = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2} \cdot \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 + d_2}.$$

作为合理性检查，$R - d_2 = \dfrac{d_1^2}{d_1 + d_2} > 0$，同理 $R - d_1 = \dfrac{d_2^2}{d_1 + d_2} > 0$，所以质点落在两幅墙之外，这是必然的。

> ? **想一想** g 和 u 到哪里去了?

它们始终只通过单一组合 a 出现，而两幅墙完全确定了 a：$u^2 = g/(2a\cos^2\theta)$。所以两幅墙决定了整条轨迹，而射程只取决于 d_1 和 d_2。

验算

- 对称性（symmetry）：互换 d_1 和 d_2 只是把两幅墙对调，而两个答案关于 d_1, d_2 都是对称的。
- 代入数值：取 $d_1 = 2$、$d_2 = 3$，得 $\tan\theta = \frac{19}{6}$、$a = \frac{5}{6}$ 及 $R = \frac{19}{5}$。于是 $y(2) = \frac{19}{3} - \frac{10}{3} = 3$，$y(3) = \frac{19}{2} - \frac{15}{2} = 2$，符合要求。以 $g = 9.8$ 对运动作数值逐步模拟，同样落在 $x = 3.8$。
- 由于 $d_1^2 + d_2^2 \geq 2d_1 d_2$，得 $\tan\theta \geq 3$，所以抛射角总是很陡（至少约 71.6°）。这是合理的：要先越过较高的墙，然后这么快就降到较矮的墙，路径必须是一道窄拱。

常见错误

- 混淆哪幅墙有哪个高度：距离为 d_1 的墙，高度是 d_2。

- 把 a 写成含 $\cos\theta$ 而非 $\cos^2\theta$，或没有把 a 当作单一未知数处理，结果留下一个关于 u 和 θ 的混乱方程组。
- 除以 $d_2 - d_1$ 时没有说明它为何不等于零。

STEP 之外

这里的技巧在于：一个带有两个自由参数（parameter）（此处为 $\tan\theta$ 和 a）的曲线族，可由它必须经过的两个点确定下来，这是插值（interpolation）的一个小例子。选取适当的未知数组合这个想法贯穿整个力学，例如求所有以固定抛射速率发射的轨迹的“包络线”（envelope）（即安全抛物线（parabola of safety））。如想学习更多大学一年级程度的抛射体及质点力学，可参阅 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。