详细解答

STEP I 2011，第 8 题

纯数学 · 丢番图方程

> **STEP I 2011，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q8

关键思路

立方函数是严格递增（strictly increasing）的，所以比较 m^3 与 n^3 及 $(n+1)^3$，等同于比较 m 与 n 及 $n+1$。若 m 严格位于两个连续整数（consecutive integers）之间，它就不可能是整数。这样便只剩下少数几个 n 值需要逐一验证。第 (ii) 部分则把同样的夹逼（squeeze）方法用于一条新的方程。

解答

全题均利用 $x \mapsto x^3$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上严格递增这一事实，故对实数 a, b，

$$a < b \iff a^3 < b^3.$$

第 (i)(a) 部分

由 $(*)$ 得

$$m^3 - n^3 = n^2 + 1 > 0,$$

因为 $n^2 \geq 0$。所以 $m^3 > n^3$，因此 $m > n$。

其次，$m < n+1$ 当且仅当 $m^3 < (n+1)^3$。利用 $(*)$ 并展开，

$$\begin{aligned} m^3 < (n+1)^3 &\iff n^3 + n^2 + 1 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &\iff 0 < 2n^2 + 3n, \end{aligned}$$

这正是所要求的等价关系。每一步都是可逆的，所以“当且仅当”成立。

现在 $2n^2 + 3n = n(2n+3)$。这是一个二次式（quadratic），其根为 $n = -\frac{3}{2}$ 及 $n = 0$，且首项系数（leading coefficient）为正，所以它恰好在 $n < -\frac{3}{2}$ 或 $n > 0$ 时为正。对任何

这样的 n，我们同时有 $m > n$ 及 $m < n+1$。因此

$$n < m < n+1 \quad \text{除非} \quad -\tfrac{3}{2} \le n \le 0.$$

第 (i)(b) 部分

设 m 和 n 是满足 $(*)$ 的整数。若 $n < -\frac{3}{2}$ 或 $n > 0$，则由 (a) 部分得 $n < m < n+1$。连续整数 n 与 $n+1$ 之间严格来说没有任何整数，所以这是不可能的。

? **想一想** (a) 部分对所有实数 n 都成立。那么“是整数”这个条件在哪里用上?

它用上了两次。一是如上所述，排除区间以外的所有 n；二是把区间 $-\frac{3}{2} \le n \le 0$ 缩减为 $n \in \{-1, 0\}$。我们逐一验证这两个值：

- $n = 0$：$m^3 = 0 + 0 + 1 = 1$，所以 $m = 1$。
- $n = -1$：$m^3 = -1 + 1 + 1 = 1$，所以 $m = 1$。

两者都给出整数 m。所以唯一的整数解是 $(m, n) = (1, 0)$ 及 $(1, -1)$，得证。

第 (ii) 部分

我们仿照第 (i) 部分的做法。首先比较 p 与 q：

$$p^3 - q^3 = 2q^2 - 1,$$

只要 $q^2 > \frac{1}{2}$，即对每个整数 $q \neq 0$，此式皆为正。对这些 q，我们有 $p > q$。

其次比较 p 与 $q+1$：

$$\begin{aligned} p^3 < (q+1)^3 &\iff q^3 + 2q^2 - 1 < q^3 + 3q^2 + 3q + 1 \\ &\iff 0 < q^2 + 3q + 2 = (q+1)(q+2). \end{aligned}$$

此式恰好在 $q > -1$ 或 $q < -2$ 时成立。

把两者结合起来。若 q 是整数，且 $q \neq 0$、$q \neq -1$ 及 $q \neq -2$，则 $q < p < q+1$，所以 p 不可能是整数。（若 $q \ge 1$ 或 $q \le -3$，两个条件均成立。）剩下 $q \in \{-2, -1, 0\}$：

- $q = 0$：$p^3 = -1$，所以 $p = -1$。
- $q = -1$：$p^3 = -1 + 2 - 1 = 0$，所以 $p = 0$。
- $q = -2$：$p^3 = -8 + 8 - 1 = -1$，所以 $p = -1$。

三者都给出整数 p，所以整数解为

$$(p, q) = (-1, 0), \quad (0, -1), \quad (-1, -2).$$

验算

把每个答案代回原式。例如，$(-1)^3 = -1 = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 1 = -8 + 8 - 1$。用电脑搜索所有 $|n|, |q| < 10^5$ 的整数，恰好找到 $(*)$ 的两个解及第 (ii) 部分的三个解，再无其他。你也可以用数值方法测试夹逼的结果。当 $n = 5$ 时，$m = \sqrt[3]{151} \approx 5.32$，严格位于 5 与 6 之间。

常见错误

- 在第 (ii) 部分遗漏 $q = 0$。此时 $p^3 - q^3 = -1 < 0$，所以下界 $p > q$ 不成立，这个情况需要另行验证。
- 写“$m^3 > n^3$，所以 $m > n$”而不给理由。这是成立的，因为立方运算是严格递增的（而平方运算对负数则不然），这一点值得写明。
- 只写到 $n < m < n + 1$ 便停下，没有说明为何这意味着 m 不是整数。

STEP 之外

像 $y^3 = f(x)$ 这类求整数点的方程称为*丢番图方程*（Diophantine equations）。把未知数夹在相邻的幂之间，是处理这类方程的标准 first 步。较难的版本，例如 $y^2 = x^3 + k$，会引出椭圆曲线（elliptic curves）以及 Baker 的对数线性型（linear forms in logarithms）理论。这些都是深奥的领域，但仍有不少情况可以用这种初等的估界方法解决。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是初等数论（number theory）的一本好入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。