详细解答

STEP I 2011，第 7 题

纯数学 · 可分离变量微分方程

STEP I 2011，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s1-q7

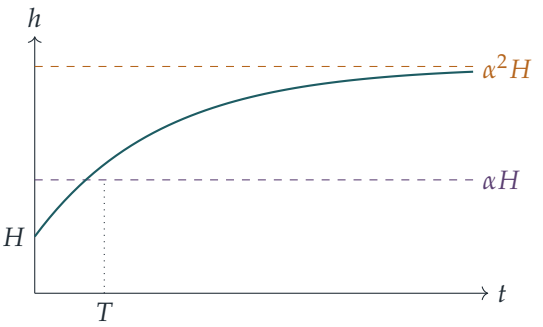
关键思路

体积等于（固定的截面面积）× 高度，所以高度的变化率就是（流入率 − 流出率）除以面积。题目中“高度保持不变”一句是确定流入率的线索：在那个高度，流入与流出恰好平衡。之后每一部分都是一条可分离变量（separable）的微分方程（differential equation）；而在第 (ii) 部分，代换（substitution）$u = \sqrt{h}$ 会把积分化为常规的计算。

解答

设固定的截面面积（cross-sectional area）为 A，固定的流入率为 q（单位时间内的体积）。水的体积为 Ah，所以

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q - (\text{流出率}).$$



高度从 H 开始上升，趋向流入与流出平衡的水平 $\alpha^2 H$，愈来愈接近却永远不会到达；问题是要多久才升到 αH，由于 $1 < \alpha < \alpha^2$，这个高度位于两者之间。（图中所示为第 (i)

部分的情况。）

第 (i) 部分

流出率为 λh，其中 $\lambda > 0$ 为某常数，所以

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q - \lambda h.$$

当 $h = \alpha^2 H$ 时高度保持不变，所以在该处 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = 0$，得 $q = \lambda\alpha^2 H$。代入后得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda}{A}\left(\alpha^2 H - h\right) = k\left(\alpha^2 H - h\right), \qquad k = \frac{\lambda}{A} > 0,$$

此即所求。

由于在整个上升过程中 $H \le h < \alpha^2 H$，所以 $\alpha^2 H - h > 0$，我们可以分离变量：

$$\begin{aligned} kT &= \int_H^{\alpha H} \frac{\mathrm{d}h}{\alpha^2 H - h} = \Big[-\ln\left(\alpha^2 H - h\right) \Big]_H^{\alpha H} = \ln\frac{\alpha^2 H - H}{\alpha^2 H - \alpha H} \\ &= \ln\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)} = \ln\frac{\alpha+1}{\alpha} = \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

其中因为 $\alpha > 1$，所以可约去 $\alpha - 1 \neq 0$。这就是所求的结果。

当 α 很大时，$x = 1/\alpha$ 很小，所以

$$kT \approx \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2} \approx \frac{1}{\alpha},$$

因为当 α 很大时，第二项相对于第一项可以忽略。

第 (ii) 部分

现在流出率为 $\mu\sqrt{h}$，其中 $\mu > 0$ 为某常数，所以 $A\,\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = q - \mu\sqrt{h}$。高度在 $h = \alpha^2 H$ 时保持不变，所以 $q = \mu\sqrt{\alpha^2 H} = \mu\alpha\sqrt{H}$（利用了 $\alpha > 0$）。因此

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = c\left(\alpha\sqrt{H} - \sqrt{h}\right), \qquad c = \frac{\mu}{A} > 0.$$

同样，当 $h < \alpha^2 H$ 时括号内的值为正，所以

$$cT' = \int_H^{\alpha H} \frac{\mathrm{d}h}{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{h}}.$$

想一想 分母中的 $\sqrt{h}$ 该如何处理?

代换 $u = \sqrt{h}$，于是 $h = u^2$ 及 $\mathrm{d}h = 2u\,\mathrm{d}u$；积分上下限变为 $u = \sqrt{H}$ 和 $u = \sqrt{\alpha H}$。为简便起见记 $a = \alpha\sqrt{H}$，被积函数便是一个有理函数（rational function），作除法后得

$$\frac{2u}{a-u} = -2 + \frac{2a}{a-u}.$$

因此

$$\begin{aligned} cT' &= \int_{\sqrt{H}}^{\sqrt{\alpha H}} \left(-2 + \frac{2a}{a-u}\right) \mathrm{d}u = \Big[-2u - 2a\ln(a-u)\Big]_{\sqrt{H}}^{\sqrt{\alpha H}} \\ &= -2\left(\sqrt{\alpha H} - \sqrt{H}\right) + 2\alpha\sqrt{H}\,\ln\frac{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{H}}{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{\alpha}\sqrt{H}} \\ &= 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \alpha\ln\frac{\alpha-1}{\alpha-\sqrt{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

由于 $u \le \sqrt{\alpha H} < \alpha\sqrt{H} = a$（因为当 $\alpha > 1$ 时 $\sqrt{\alpha} < \alpha$），对数内的量都是正数。最后，因式分解 $\alpha - 1 = (\sqrt{\alpha}-1)(\sqrt{\alpha}+1)$ 及 $\alpha - \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}-1)$，得

$$\frac{\alpha-1}{\alpha-\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

所以

$$cT' = 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \alpha\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right),$$

此即所求。

当 α 很大时，$1/\sqrt{\alpha}$ 很小，所以

$$\alpha\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \approx \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{2\alpha}\right) = \sqrt{\alpha} - \frac{1}{2}.$$

两个大项 $\pm\sqrt{\alpha}$ 互相抵消，剩下

$$cT' \approx 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha} - \tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{H}.$$

留意这里我们需要用到对数展开中的 x^2 项：若只用 $\ln(1+x) \approx x$，括号内的值会是 1，于是得到 $2\sqrt{H}$，这是错的。这正是题目给出两项近似式的原因。

验算

- 当 $\alpha \to 1^+$ 时，(i) 给出 $kT \to \ln 2$，而不是 0。这是对的：与平衡点（equilibrium）的差距起初为 $(\alpha^2-1)H \approx 2(\alpha-1)H$，而须缩小至 $(\alpha^2-\alpha)H \approx (\alpha-1)H$，即差距减半；而以速率 k 进行的指数衰减（exponential decay）减半所需时间为 $(\ln 2)/k$。在 (ii) 中，$cT' \to 2\sqrt{H}\ln 2$，这与在 $h = H$ 附近把 $\sqrt{h}$ 线性化（linearising）所得的等效速率 $c/(2\sqrt{H})$ 下同样的减半相吻合。
- 取 $\alpha = 4$ 及 $H = 1$：$kT = \ln 1.25 \approx 0.2231$，$cT' = 2(-1 + 4\ln 1.5) \approx 1.2437$。对多组随机的 H, α, k, c 用数值方法（龙格—库塔法（Runge–Kutta））逐步求解两条微分方程，结果与两条公式吻合至 10^{-9}。
- 取 $\alpha = 10^4$、$H = 2$：$\alpha\ln(1 + 1/\alpha) \approx 0.99995$，$cT'/\sqrt{H} \approx 1.0066$，与极限值一致（下一项给出 $cT' \approx \sqrt{H}\,(1 + \frac{2}{3\sqrt{\alpha}})$）。

常见错误

- 忘记利用平衡条件消去流入率，结果剩下太多常数。
- 在第 (ii) 部分只用 $\ln(1+x) \approx x$，因而丢失了关键的 $-\frac{1}{2}$。
- 把 $\sqrt{\alpha^2 H}$ 写成 $\alpha^2\sqrt{H}$。

STEP 之外

两个模型都是一阶自治微分方程（first-order autonomous differential equation）$\dot{h} = f(h)$，并在 $h = \alpha^2 H$ 处有一个稳定平衡点；线性的情况其实就是换了包装的牛顿冷却定律（Newton's law of cooling），而 $\sqrt{h}$ 的情况则是描述液体从小孔流出的托里拆利定律（Torricelli's law）。不必明确求解而去研究平衡点及其稳定性，正是常微分方程（ODE）定性理论（qualitative theory）的起点。Boyce 与 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）在前几章便讨论了自治方程和水箱混合模型。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。