详细解答

STEP I 2011，第 6 题

纯数学 · 二项式级数求和

> **STEP I 2011，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q6

关键思路

只要知道 $(1-x)^{-3}$ 的系数（coefficients），再乘上一个多项式（polynomial），其实只是把几个相邻的系数混合起来，所以较复杂的有理函数（rational function）的系数几乎可以不费吹灰之力得出。把这个过程倒过来看，一个各项为 (多项式，自变量为r) $\times\, x^r$ 的级数（series），只要看出是哪一个有理函数生成它，再代入适当的 x 值（这里是 $x=\frac{1}{2}$），便可求和。

解答

开首的结果

当 $|x|<1$ 时，指数（index）为 -3 的二项式展开（binomial expansion）给出

$$(1-x)^{-3}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-3)(-4)\cdots(-3-r+1)}{r!}(-x)^r.$$

分子共有 r 个因子，每个都是负数，所以它们的积是 $(-1)^r\,\dfrac{(r+2)!}{2!}$，而这个 $(-1)^r$ 与 $(-x)^r$ 中的 $(-1)^r$ 互相抵消。因此 x^r 的系数是

$$a_r=\frac{(r+2)!}{2!\,r!}=\tfrac{1}{2}(r+1)(r+2),$$

正如所求。（所以 $a_0=1$、$a_1=3$、$a_2=6$、$a_3=10$、...）

第 (i) 部分

写成

$$\frac{1-x+2x^2}{(1-x)^3} = (1-x+2x^2)\sum_{k\geq 0} a_k x^k.$$

x^r 项来自 $1\cdot a_r x^r$、$-x\cdot a_{r-1}x^{r-1}$ 及 $2x^2\cdot a_{r-2}x^{r-2}$，所以当 $r\geq 2$ 时，x^r 的系数是

$$\begin{aligned} a_r - a_{r-1} + 2a_{r-2} &= \tfrac{1}{2}(r+1)(r+2) - \tfrac{1}{2}r(r+1) + (r-1)r \\ &= (r+1) + r^2 - r \\ &= r^2 + 1. \end{aligned}$$

想一想 当 $r=0$ 及 $r=1$ 时，a_{r-1} 或 a_{r-2} 并不存在，这条公式是否仍然成立?

成立。若设 $a_{-1} = a_{-2} = 0$，公式 $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ 在 $r=-1$ 及 $r=-2$ 时亦给出 0，所以上面的计算对所有 $r\geq 0$ 都成立。直接验证：常数项是 $a_0 = 1 = 0^2+1$，而 x 的系数是 $a_1 - a_0 = 2 = 1^2+1$。所以对所有 $r\geq 0$，x^r 的系数都是 r^2+1，正如所求。

至于该级数，分子 $1,2,5,10,17,26,37,50,\ldots$ 是 $r=0,1,2,\ldots$ 时的 r^2+1，而分母是 2^r。所以该级数是

$$\sum_{r=0}^{\infty}(r^2+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^r,$$

即上述展开式在 $x=\frac{1}{2}$ 时的值。这样做是合理的，因为 $(1-x)^{-3}$ 的二项式展开在 $|x|<1$ 时收敛（converges）。因此

$$1+\frac{2}{2}+\frac{5}{4}+\frac{10}{8}+\cdots = \frac{1-\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{1/8} = 8.$$

第 (ii) 部分

首要任务是找出规律。把各项改写成分母为 $1,2,4,8,16,32,64$：

$$1,\ \frac{4}{2},\ \frac{9}{4},\ \frac{16}{8},\ \frac{25}{16},\ \frac{36}{32},\ \frac{49}{64},\ \cdots$$

所以该级数是 $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r+1)^2}{2^r}$。

想一想 $(1-x)^3$ 上面放甚么分子，才会得出系数 $(r+1)^2$?

第 (i) 部分提示我们试用分子 $1+x$（同样是一个简短的多项式）。$(1+x)(1-x)^{-3}$ 中 x^r 的系数是

$$a_r + a_{r-1} = \tfrac{1}{2}(r+1)(r+2) + \tfrac{1}{2}r(r+1) = \tfrac{1}{2}(r+1)(2r+2) = (r+1)^2,$$

对所有 $r \geq 0$ 均成立（与之前一样取 $a_{-1} = 0$）。代入 $x = \frac{1}{2}$，

$$1 + 2 + \frac{9}{4} + 2 + \frac{25}{16} + \cdots = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12.$$

*另一方法：利用第 (i) 部分。*以 $s = r + 1$ 平移下标，使得 $2^{-r} = 2 \cdot 2^{-s}$：

$$\sum_{r \geq 0} \frac{(r+1)^2}{2^r} = 2 \sum_{s \geq 1} \frac{s^2}{2^s} = 2 \left(\sum_{s \geq 0} \frac{s^2 + 1}{2^s} - \sum_{s \geq 0} \frac{1}{2^s} \right) = 2(8 - 2) = 12,$$

这里用了第 (i) 部分的答案及几何级数（geometric series）$\sum 2^{-s} = 2$。

验算

- 以人手把 $(1 - x)^{-3}$ 展开为 $(1 + x + x^2 + \cdots)^3$，或把头几项乘开，得到 $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots$，与 $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ 吻合。
- 第 (i) 部分级数的部分和（partial sums）趋近 8：取 200 项后，和与 8 在机器精度内一致。第 (ii) 部分同样如此，极限为 12。
- 第 (ii) 部分的两个方法得出相同答案 12。

常见错误

- 二项式系数的正负号弄错：$(-3)(-4)\cdots$ 中有 r 个负号，$(-x)^r$ 中亦有 r 个，两者互相抵消。
- 在第 (ii) 部分，因为部分分数已约至最简而看错规律：$2 = \frac{4}{2} = \frac{16}{8}$，以及 $\frac{9}{8} = \frac{36}{32}$。
- 代入 $x = \frac{1}{2}$ 时没有指出展开式在该处收敛（$|x| < 1$）。

STEP 之外

我们一直在做的，其实是运用*生成函数*（*generating functions*）：把数列 $c_0, c_1, c_2, \ldots$ 编码成幂级数（power series）$\sum c_r x^r$，于是对数列的运算便变成对函数的代数运算。事实上，任何“r 的多项式乘以 x^r”之和，都是一个分母为 $(1 - x)$ 的幂的有理函数，这就是为何这类和总是得出有理数。要证明代入某个 x 值是合理的，需要依靠幂级数及其收敛半径（radius of convergence）的理论，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；至于把生成函数作为解题工具，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶难题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。