详细解答

STEP I 2011，第 5 题

纯数学 · 含绝对值的积分

STEP I 2011，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s1-q5

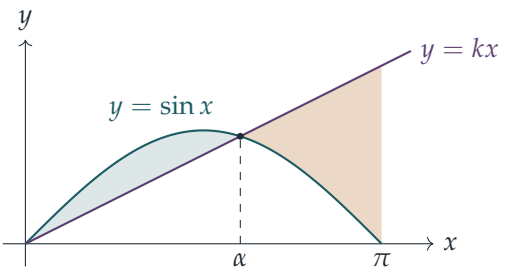
关键思路

只要知道 $\sin x - kx$ 在哪里变号，绝对值符号（modulus）就不再麻烦，而草图正告诉我们：只变号一次，就在 $x = \alpha$ 处。在该处把积分拆开，绝对值符号便会消失。最后一步是不再把 k 看作变量：由于 $k = \sin\alpha/\alpha$，所有东西都可以用 α 表示，而 I 的导数（derivative）便能整齐地因式分解。

解答

唯一的根

设 $g(x) = \sin x - kx$。直线 $y = kx$ 经过原点，斜率为 $k < 1$；而 $y = \sin x$ 离开原点时的斜率为 $\cos 0 = 1$。因此在 0 的右边附近，正弦曲线位于直线之上。在 $x = \pi$ 处，正弦曲线回到 0，但直线的高度为 $k\pi > 0$，所以在那里直线位于上方。由于 $y = \sin x$ 在 $(0, \pi)$ 上向下弯曲，而直线是直的，两者在其间恰好相交一次。



要令“恰好一次”无懈可击：$g(0) = 0$、$g'(x) = \cos x - k$，而且在 $(0, \pi)$ 上 $g''(x) = -\sin x < 0$。所以 g' 严格递减（strictly decreasing），由 0 处的 $1 - k > 0$ 减至 π 处的

$-1-k<0$，并恰好在一点 β 等于零。因此 g 在 $(0,\beta]$ 上严格递增，故在该处为正（因为它由 0 开始），并在 $[\beta,\pi)$ 上严格递减，由正值减至 $g(\pi)=-k\pi<0$。所以它在 $(0,\pi)$ 中恰有一个零点 α，而且

$$\sin x > kx \text{ 当} 0<x<\alpha, \qquad \sin x < kx \text{ 当} \alpha<x<\pi.$$

计算 I

利用这些正负号（即草图中的蓝绿色和琥珀色区域），

$$I=\int_0^{\alpha}(\sin x-kx)\,\mathrm{d}x-\int_{\alpha}^{\pi}(\sin x-kx)\,\mathrm{d}x.$$

$\sin x-kx$ 的一个原函数（antiderivative）是 $F(x)=-\cos x-\frac{1}{2}kx^2$，所以

$$\begin{aligned} I&=(F(\alpha)-F(0))-(F(\pi)-F(\alpha))=2F(\alpha)-F(0)-F(\pi)\\ &=(-2\cos\alpha-k\alpha^2)+1-(1-\tfrac{1}{2}k\pi^2)\\ &=\tfrac{1}{2}k\pi^2-2\cos\alpha-k\alpha^2. \end{aligned}$$

由于 α 满足 $(*)$，$k=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$，所以 $k\alpha^2=\alpha\sin\alpha$，而且

$$I=\frac{\pi^2\sin\alpha}{2\alpha}-2\cos\alpha-\alpha\sin\alpha,$$

即为所求。

驻值（stationary value）

想一想 α 可以取甚么值?

每个 $k\in(0,1)$ 都给出一个 $\alpha\in(0,\pi)$。反过来，每个 $\alpha\in(0,\pi)$ 都来自 $k=\sin\alpha/\alpha$，而它位于 $(0,1)$ 之中，因为在该范围内 $0<\sin\alpha<\alpha$。因此我们必须研究 $I(\alpha)$ 在开区间 $(0,\pi)$ 内所有 α 的情况。

对第一项使用商法则（quotient rule）求导，得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}&=\frac{\pi^2(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{2\alpha^2}+2\sin\alpha-(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)\\ &=\frac{\pi^2(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{2\alpha^2}-(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\\ &=(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\frac{\pi^2}{2\alpha^2}-1\right). \end{aligned}$$

第一个因子在 $(0,\pi)$ 上永不为零。设 $h(\alpha)=\alpha\cos\alpha-\sin\alpha$。那么 $h(0)=0$，而且在 $(0,\pi)$ 上 $h'(\alpha)=\cos\alpha-\alpha\sin\alpha-\cos\alpha=-\alpha\sin\alpha<0$，所以在整个区间上 $h(\alpha)<0$。（等价地，在 $(0,\frac{1}{2}\pi)$ 上 $\tan\alpha>\alpha$，而在此之后 $\cos\alpha\le 0$。）

所以 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha = 0$ 当且仅当 $\pi^2 = 2\alpha^2$，即在 $\alpha = \pi/\sqrt{2}$ 处，而它确实位于 $(0, \pi)$ 之中。这是唯一的驻值。由于 $h < 0$，$\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha$ 的正负号与 $\frac{\pi^2}{2\alpha^2} - 1$ 的正负号相反：

- 当 $0 < \alpha < \pi/\sqrt{2}$ 时，$\frac{\pi^2}{2\alpha^2} > 1$，所以 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha < 0$；
- 当 $\pi/\sqrt{2} < \alpha < \pi$ 时，$\frac{\pi^2}{2\alpha^2} < 1$，所以 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha > 0$。

所以 I 先减后增：该驻值是极小值，而由于它是区间上唯一的驻点，它就是 I 的最小值。

当 $\alpha = \pi/\sqrt{2}$ 时，我们有 $\dfrac{\pi^2}{2\alpha} = \dfrac{\pi^2}{\sqrt{2}\,\pi} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} = \alpha$，所以 I 的第一项与第三项互相抵消：

$$I_{\min} = \alpha \sin\alpha - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha = -2\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

这个值是正数，理应如此，因为 $\pi/\sqrt{2} \approx 2.22$ 位于 $\frac{1}{2}\pi$ 与 π 之间，而余弦在该范围内为负。

验算

- 当 $k \to 0$ 时，$\alpha \to \pi$，公式给出 $I \to 2$，这正是 $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$。当 $k \to 1$ 时，$\alpha \to 0$，而 $I \to \frac{1}{2}\pi^2 - 2$，这正是 $\int_0^\pi (x - \sin x)\,\mathrm{d}x$。
- 数值上，$-2\cos(\pi/\sqrt{2}) \approx 1.2114$，比两个端值 2 和 $\frac{1}{2}\pi^2 - 2 \approx 2.935$ 都小。直接以中点法数值积分（midpoint quadrature）计算 $\int_0^\pi |\sin x - kx|\,\mathrm{d}x$，取 $k = \sin\alpha/\alpha \approx 0.3582$，同样得到 1.2114。

常见错误

- 对 α 求导时把 k 当作常数：k 依赖于 α，这正是我们要先代入 $k = \sin\alpha/\alpha$ 的原因。
- 只证明了 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha = 0$ 仅在 $\alpha = \pi/\sqrt{2}$ 处成立，却忘记证明 $\alpha\cos\alpha - \sin\alpha$ 在 $(0, \pi)$ 中没有零点。

STEP 之外

唯一根的论证用到介值定理（intermediate value theorem）以及严格单调性，而求最小值时则默默用到一个事实：$\alpha \mapsto k$ 是 $(0, \pi)$ 与 $(0, 1)$ 之间的双射（bijection），因此对 α 求最小值等同于对 k 求最小值。要把这类重新参数化（reparametrisation）和存在性论证变得严谨，正是实分析（real analysis）入门课程的工作；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是极佳的起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。