详细解答

STEP I 2011，第 4 题

纯数学 · 抛物线的切线

> **STEP I 2011，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q4

关键思路

把抛物线（parabola）上一般点的切线（tangent）写成不含分数的形式，两条切线的交点只需相减便可得出。至于角度，则用 $\overrightarrow{FT}$ 与 $\overrightarrow{FP}$ 的纯量积（scalar product）。各段长度其实比表面看来容易处理：FP 是焦半径（focal distance），而 FT^2 可以因式分解。求得 $\cos\phi$ 之后，留意答案对 p 和 q 是对称的。这种对称性就是证明角平分的全部关键。

解答

点 T

对 $y^2 = 4ax$ 作隐函数求导（implicit differentiation），得 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4a$。因此在 P 点，即 $y = 2ap \neq 0$ 之处（因为 $p \neq 0$），斜率为 $\dfrac{4a}{4ap} = \dfrac{1}{p}$。所以 P 点的切线为

$$y - 2ap = \frac{x - ap^2}{p} \quad \Longleftrightarrow \quad py = x + ap^2,$$

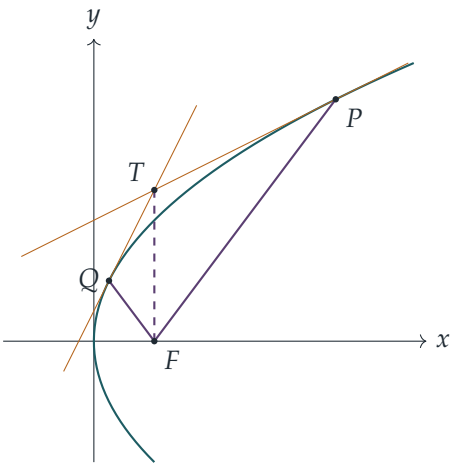
同理，Q 点的切线为 $qy = x + aq^2$。两式相减，得

$$(p - q)\,y = a(p^2 - q^2) = a(p - q)(p + q).$$

由于 P 和 Q 是相异的点，$p \neq q$，故可以除以 $p - q$，得 $y = a(p + q)$。于是

$$x = py - ap^2 = ap^2 + apq - ap^2 = apq,$$

所以 T 是点 $(apq,\, a(p + q))$，与所求相符。



图中取 $a=1$、$p=2$、$q=\frac{1}{2}$，此时 FT 恰好是铅垂的。

角 ϕ

首先注意 $T\neq F$：否则需要 $p+q=0$ 及 $pq=1$，从而 $p^2=-1$，这是不可能的。所以角 TFP 是有意义的。设 $F=(a,0)$，则

$$\overrightarrow{FP}=a\begin{pmatrix}p^2-1\\2p\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{FT}=a\begin{pmatrix}pq-1\\p+q\end{pmatrix}.$$

两者的长度为

$$FP^2=a^2[(p^2-1)^2+4p^2]=a^2(p^2+1)^2,$$
$$FT^2=a^2[(pq-1)^2+(p+q)^2]=a^2[p^2q^2+p^2+q^2+1]=a^2(p^2+1)(q^2+1),$$

因为交叉项 $-2pq$ 与 $+2pq$ 互相抵消。所以 $FP=|a|(p^2+1)$，而 $FT=|a|\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}$。

> ? **想一想** 我们怎样看出纯量积可以因式分解?

我们预期 (p^2+1) 会与 FP 约去，所以刻意寻找这个因式。展开得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FT}&=a^2[(p^2-1)(pq-1)+2p(p+q)]\\&=a^2[p^3q-p^2-pq+1+2p^2+2pq]\\&=a^2[p^3q+pq+p^2+1]\\&=a^2(p^2+1)(pq+1).\end{aligned}$$

因此，利用 $|a|^2=a^2$，

$$\cos\phi=\frac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FT}}{FP\cdot FT}=\frac{a^2(p^2+1)(pq+1)}{a^2(p^2+1)\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}}=\frac{pq+1}{\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}},$$

这正是所求的结果。

角平分

T 的坐标对 p 和 q 是对称的，所以在上面的计算中把 P 和 Q 的角色对调，便知角 TFQ 满足

$$\cos\angle TFQ = \frac{qp+1}{\sqrt{(q^2+1)(p^2+1)}} = \cos\phi.$$

两个角都在 $[0,\pi]$ 之内，而余弦在此区间上是一一对应（one-to-one）的，所以 $\angle TFP = \angle TFQ = \phi$。

因此，射线（ray）FP 和 FQ 各自与射线 FT 成 ϕ 角。在平面上，从 F 出发而与 FT 成 ϕ 角的射线只有两条，而且它们以直线 FT 为镜互为镜像。射线 FP 和 FQ 并不是同一条射线：一条穿过焦点（focus）的直线与抛物线相交于 F 两侧的两点（或只相交一次），所以从 F 出发的一条射线不可能同时经过 P 和 Q。因此 FP 和 FQ 互为对直线 FT 的反射，而这正好表示直线 FT 平分角 PFQ。

有一个细节可以解释为何题目说的是直线 FT。若 $pq+1>0$，则 $\phi<\frac{\pi}{2}$，射线 FT 本身位于角 $PFQ=2\phi$ 之内。若 $pq+1<0$，则 $\phi>\frac{\pi}{2}$，角 PFQ 为 $2\pi-2\phi$，平分它的是 TF 越过 F 的延长线。若 $pq=-1$，则 PQ 是焦弦（focal chord），$\phi=\frac{\pi}{2}$，而 FT 与它垂直，平分这个平角。在所有情况下，直线 FT 都平分角 PFQ。

验算

取图中的 $a=1$、$p=2$、$q=\frac{1}{2}$：$T=(1,\frac{5}{2})$，$\overrightarrow{FP}=(3,4)$，$\overrightarrow{FQ}=(-\frac{3}{4},1)$，$\overrightarrow{FT}=(0,\frac{5}{2})$。于是 $\cos\angle TFP=\frac{4}{5}$，而 $\cos\angle TFQ=\frac{1}{5/4}=\frac{4}{5}$，与 $\dfrac{2}{\sqrt{5\cdot\frac{5}{4}}}=\dfrac{4}{5}$ 吻合。用电脑测试 10^5 组随机选取的 a（正负皆有）、p 和 q，在 10^{-10} 的误差范围内证实了 T 的坐标、$\cos\phi$ 的公式以及角平分的结论。测试包括许多 $pq<-1$ 的情况，此时是 FT 向后的延长线起平分作用。

常见错误

- 除以 $p-q$ 时没有说明它为何不等于零（因为两点相异）。
- 写成 $FP=a(p^2+1)$，这在 $a<0$ 时是错的。$\cos\phi$ 中只出现 a^2，所以最终 a 的正负并无影响。
- 只说“余弦相等，所以 FT 平分该角”，却没有解释为何 FP 和 FQ 位于直线 FT 的两侧。

STEP 之外

这其实是抛物线的反射性质（reflective property）换了个样子出现：从任何外部点引出的两条切线段，在焦点处所张的角相等。椭圆（ellipse）和双曲线（hyperbola）也有同样的性质，三者都源于圆锥曲线（conic）的焦点－准线（focus–directrix）定义，大学一年级的几何及射影几何（projective geometry）课程会对此作更深入的发展。如想做更多同类风格的题目，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）可免费取得，非常值得逐题钻研。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。