详细解答

STEP I 2011，第 3 题

纯数学 · 三角恒等式

STEP I 2011，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s1-q3

关键思路

在 $\frac{1}{3}\pi \mp \theta$ 处的两个正弦相乘，可以用平方差（difference of squares）的技巧干净地化简，于是一行就能证明 $(*)$。之后，余切（cotangent）的和式来自对乘积求导：三个因子乘积的导数除以该乘积本身，就是三个“对数导数”（logarithmic derivative）之和，而对正弦而言，这些对数导数正是余切。对余弦的版本做同样的事就得到正切，而 $\tan x + \cot x$ 是一个余割（cosecant）。

解答

恒等式（identity）$(*)$

记 $a = \frac{1}{3}\pi$。由复角公式（compound-angle formulae），

$$\begin{aligned}\sin(a-\theta)\sin(a+\theta) &= (\sin a\cos\theta - \cos a\sin\theta)(\sin a\cos\theta + \cos a\sin\theta)\\ &= \sin^2 a\cos^2\theta - \cos^2 a\sin^2\theta\\ &= \sin^2 a\,(1-\sin^2\theta) - (1-\sin^2 a)\sin^2\theta = \sin^2 a - \sin^2\theta.\end{aligned}$$

由于 $\sin^2 a = \frac{3}{4}$，

$$4\sin\theta\sin(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\sin(\tfrac{1}{3}\pi+\theta) = 4\sin\theta\left(\tfrac{3}{4}-\sin^2\theta\right) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta,$$

最后一步用了三倍角公式（triple-angle formula）。这就对所有 θ 证明了 $(*)$。

第 (i) 部分

由于 $(*)$ 对所有 θ 成立，我们可以对两边求导。由乘积法则（product rule），

$$4\Big[\cos\theta\sin(a-\theta)\sin(a+\theta)-\sin\theta\cos(a-\theta)\sin(a+\theta)\\ +\sin\theta\sin(a-\theta)\cos(a+\theta)\Big]=3\cos 3\theta,$$

其中中间一项的负号来自对 $a-\theta$ 应用链式法则（chain rule）。

想一想 怎样把它变成余切?

两边除以 $\sin 3\theta$，而由 $(*)$，它等于 $4\sin\theta\sin(a-\theta)\sin(a+\theta)$。左边每一项中，除了被求导的那个因子外，其余的正弦都会约去。只要 $\sin 3\theta\neq 0$，这样做便是容许的，而此时三个正弦亦全不为零。我们得到

$$\cot\theta-\cot(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)+\cot(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=3\cot 3\theta\qquad(\sin 3\theta\neq 0).\tag{A}$$

现在代入 $\theta=\frac{1}{9}\pi$，此时 $\sin 3\theta=\sin\frac{1}{3}\pi\neq 0$。由于 $\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{9}\pi=\frac{2}{9}\pi$ 及 $\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{9}\pi=\frac{4}{9}\pi$，

$$\cot\tfrac{1}{9}\pi-\cot\tfrac{2}{9}\pi+\cot\tfrac{4}{9}\pi=3\cot\tfrac{1}{3}\pi=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

即为所求。

第 (ii) 部分

在 $(*)$ 中代入 $\theta=\frac{1}{6}\pi-\phi$。四个正弦变成

$$\begin{aligned}\sin\theta=\sin(\tfrac{1}{6}\pi-\phi)&=\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\phi),\\ \sin(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)=\sin(\tfrac{1}{6}\pi+\phi)&=\cos(\tfrac{1}{3}\pi-\phi),\\ \sin(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\phi)&=\cos\phi,\\ \sin 3\theta=\sin(\tfrac{1}{2}\pi-3\phi)&=\cos 3\phi,\end{aligned}$$

每次都用了 $\sin(\frac{1}{2}\pi-x)=\cos x$。于是，把 ϕ 改记为 θ，

$$4\cos\theta\cos(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\cos 3\theta\qquad\text{对所有}\theta.\tag{**}$$

把 $(*)$ 除以 $(**)$，因子 4 互相抵消，而每个正弦除以余弦都是正切；取倒数，

$$\cot\theta\cot(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\cot(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\cot 3\theta,$$

此式在两边皆有定义之处成立，即 $\sin 3\theta\neq 0$ 及 $\cos 3\theta\neq 0$ 之处（每个条件都令相应的三个因子不为零）。

至于余割的和，我们如第 (i) 部分一样对 $(**)$ 求导：

$$4\Big[-\sin\theta\cos(a-\theta)\cos(a+\theta)+\cos\theta\sin(a-\theta)\cos(a+\theta)\\ -\cos\theta\cos(a-\theta)\sin(a+\theta)\Big]=-3\sin 3\theta.$$

除以 $\cos 3\theta = 4\cos\theta\cos(a-\theta)\cos(a+\theta)$（当它不为零时），再乘以 -1，

$$\tan\theta-\tan(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)+\tan(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=3\tan 3\theta. \qquad \text{(B)}$$

(A) 与 (B) 的正负号一致，所以可以把两式相加。

> **想一想** 为甚么把正切与余切相加会有帮助?

因为 $\tan x+\cot x$ 是单一个余割：

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}=2\operatorname{cosec}2x.$$

所以只要 $\sin 6\theta\neq 0$，把 (A) 与 (B) 相加便得

$$2\operatorname{cosec}2\theta-2\operatorname{cosec}(\tfrac{2}{3}\pi-2\theta)+2\operatorname{cosec}(\tfrac{2}{3}\pi+2\theta)=6\operatorname{cosec}6\theta.$$

现在取 $\theta=\frac{1}{18}\pi$，使 $2\theta=\frac{1}{9}\pi$ 及 $6\theta=\frac{1}{3}\pi$（且 $\sin 6\theta\neq 0$）。由于 $\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{9}\pi=\frac{5}{9}\pi$ 及 $\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{9}\pi=\frac{7}{9}\pi$，除以 2 得

$$\operatorname{cosec}\tfrac{1}{9}\pi-\operatorname{cosec}\tfrac{5}{9}\pi+\operatorname{cosec}\tfrac{7}{9}\pi=3\operatorname{cosec}\tfrac{1}{3}\pi=3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3},$$

即为所求。

验算

- 在 $\theta=\frac{1}{6}\pi$ 时，$(*)$ 变成 $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=1=\sin\frac{1}{2}\pi$；而 $(**)$ 在 $\theta=0$ 时变成 $4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1=\cos 0$。
- 数值上，$\cot 20^\circ-\cot 40^\circ+\cot 80^\circ\approx 2.7475-1.1918+0.1763=1.7321\approx\sqrt{3}$，而 $\operatorname{cosec}20^\circ-\operatorname{cosec}100^\circ+\operatorname{cosec}140^\circ\approx 2.9238-1.0154+1.5557=3.4641\approx 2\sqrt{3}$。
- 恒等式 (A)、(B) 以及余切乘积式都可以用计算机在任意随机的 θ 测试；我们在数千个随机值上验证过。

常见错误

- 对 $\sin(\frac{1}{3}\pi-\theta)$ 求导时忘记链式法则带来的负号，以致破坏了 (A) 中正负交替的符号。
- 除以 $\sin 3\theta$ 时没有指出它在所代入的值上必须不为零。
- 试图从余切的乘积得出余割的和：真正能够合并的是和式 (A) 与 (B)。

STEP 之外

把导数除以函数本身的技巧就是对数微分法（logarithmic differentiation）：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln|f| = f'/f$ 把乘积变成和。再推进一步，sin 本身可以写成遍及其零点的无穷乘积（infinite product），而对数微分法随即给出著名的部分分式展开（partial-fraction expansion）$\pi\cot\pi x = \sum_n \frac{1}{x-n}$；恒等式 $(*)$ 正是它的一个有限的影子。这些想法在复分析（complex analysis）中有所发展；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）是一个美妙的起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。