详细解答

STEP I 2011，第 2 题

纯数学 · 代换积分法

> **STEP I 2011，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q2

关键思路

积分 E 没有初等闭式（elementary closed form），所以我们根本不打算求它的值，而是把其余每个积分变形，直到 E 本身出现为止。对于头两个积分，做法是用代数除法（algebraic division）把分式拆开，从而把麻烦的 $\frac{1}{1+x}$ 分离出来。对于 (i) 和 (ii)，做法是选取一个代换（substitution），使被积函数（integrand）在 $[0,1]$ 上变回 $\frac{\mathrm{e}^u}{1+u}$：观察指数部分，想想怎样才能把它变成新的变量。

解答

头两个积分

把 x 写成 $x=(1+x)-1$，

$$\frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x}=\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}^x}{1+x},$$

因此

$$\int_0^1\frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x-E=\mathrm{e}-1-E,$$

正如所求。

至于第二个积分，把 x^2 除以 $1+x$：由于 $x^2=(x-1)(1+x)+1$，

$$\frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{1+x}=x\,\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}.$$

取 $u=x$、$\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ 作分部积分（integration by parts），

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\left[x\,\mathrm{e}^x\right]_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$$

因此

$$\int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1-(\mathrm{e}-1)+E = 2-\mathrm{e}+E.$$

（另一做法是写成 $\frac{x^2}{1+x} = x - \frac{x}{1+x}$，然后直接利用第一个结果：$1-(\mathrm{e}-1-E)$ 得出相同答案。）

第 (i) 部分

指数是最棘手的部分，所以我们把它设为新的变量：

$$u = \frac{1-x}{1+x}.$$

解出 x：$u(1+x) = 1-x$，所以 $x = \dfrac{1-u}{1+u}$。于是

$$1+x = \frac{2}{1+u}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{-(1+u)-(1-u)}{(1+u)^2} = -\frac{2}{(1+u)^2}.$$

当 $x=0$ 时，$u=1$；当 $x=1$ 时，$u=0$。因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1-x}{1+x}}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^0 \mathrm{e}^u \cdot \frac{1+u}{2} \cdot \left(-\frac{2}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u}{1+u}\,\mathrm{d}u = E.\end{aligned}$$

$\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ 带来的负号，用来把积分上下限调回递增次序。

> **想一想** 为甚么我们应该预期答案恰好是 E，而完全没有 e?

映射 $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ 把 $[0,1]$ 映到自身（它把两个端点互换），而因子 $\frac{1}{1+x}$ 与 $\mathrm{d}x$ 结合后恰好得到 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$。事实上 $\frac{\mathrm{d}x}{1+x} = -\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$，这是记住整个计算的一个巧妙方法。

第 (ii) 部分

现在目标区间 $[0,1]$ 必须来自 $x \in [1,\sqrt{2}]$，而在这区间上 x^2 由 1 变到 2。所以我们试

$$u = x^2 - 1, \qquad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x,$$

当 $x=1$ 时 $u=0$，当 $x=\sqrt{2}$ 时 $u=1$。于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}u}{2(1+u)}, \qquad \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{1+u} = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^u,$$

因此

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u}{1+u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}E}{2}.$$

想一想 为甚么不用代换 $u = x^2$?

这样也行得通，会得到 $\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$，但区间是 $[1,2]$ 而不是 $[0,1]$。再平移一个单位，即 $u \mapsto u-1$，便得到相同的答案；$u = x^2 - 1$ 只不过是一步做完这两步。

验算

辛普森法则 (Simpson's rule) 给出 $E \approx 1.125386$。以数值计算，第一个积分是 $0.592896 = \mathrm{e} - 1 - E$，第二个是 $0.407104 = 2 - \mathrm{e} + E$，(i) 中的积分是 $1.125386 = E$，而 (ii) 中的积分是 $1.529558 = \frac{1}{2}\mathrm{e}E$。不用电脑也可以快速检查是否合理：头两个被积函数都是正的，而的确 $\mathrm{e} - 1 - E \approx 0.59 > 0$ 及 $2 - \mathrm{e} + E \approx 0.41 > 0$；此外第二个比第一个小，这也理所当然，因为在 $[0,1]$ 上 $x^2 \le x$。

常见错误

- 在 (i) 中忘记把上下限倒转（或漏掉负号），结果得到 $-E$；对于正的被积函数，这是不可能的答案。
- 在 (ii) 中漏掉 $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{1+u}$ 带来的因子 e，或漏掉 $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ 带来的因子 $\frac{1}{2}$。

STEP 之外

像 E 这样的积分与指数积分（exponential integral）$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ 密切相关：代入 $t = 1 + x$ 可得 $E = \mathrm{e}^{-1}\big(\mathrm{Ei}(2) - \mathrm{Ei}(1)\big)$。刘维尔（Liouville）的理论证明了 $\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$ 没有初等原函数（elementary antiderivative），这正是题目把 E 当作一个具名常数、并要求我们把一切化归为它的原因。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）收录了更多同类型的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。