详细解答

STEP I 2011，第 12 题

概率与统计 • 排队与选票问题

STEP I 2011，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s1-q12

本题在 *Beyond STEP* 第 9.10 节总能找赎中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/ballot.html

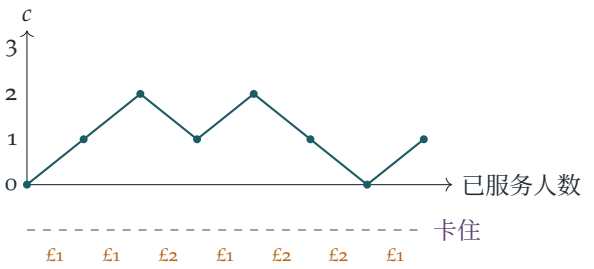
关键思路

只需追踪一个数字：我手上有多少枚 £1 硬币。每位付 £1 的顾客令这个数字加一；每位付 £2 的顾客令它减一（我收下他们的 £2 硬币，但这枚硬币不能用来找零）。我会卡住，当且仅当一位付 £2 的顾客到来时，我手上一枚 £1 硬币也没有。由于付 £2 的顾客只有寥寥几位，危险全都集中在队伍的前端，所以我们只需看队伍最前面的几个人，逐一分析每种开头会带来甚么结果。

解答

重要的只是队伍中硬币的排列模式，而不是那些人是谁。由于所有人的排列都是等可能的，任何一个位置上的人，等可能是尚未排入队伍的任何一人，因此我们可以从队头开始逐个建构队伍：若尚余 a 位持 £1 硬币的人和 b 位持 £2 硬币的人，则下一位持 £1 硬币的概率（probability）为 $\frac{a}{a+b}$，持 £2 硬币的概率为 $\frac{b}{a+b}$。

设 c 为我手上 £1 硬币的数目。我能服务所有人，当且仅当 c 永远不需要跌至 0 以下，即在队伍中的每一点，已服务的 £1 顾客人数至少与已服务的 £2 顾客人数一样多。



上图显示一条成功的队伍：c 的路径从未触及虚线。

第 (i) 部分

若只有一位付 £2 的顾客，唯一会卡住的情况是此人排在队首，那时我手上没有零钱。若队首是其他人，那么到这位 £2 顾客到来时，我手上至少有一枚 £1 硬币。这位 £2 顾客等可能排在 $m+1$ 个位置中的任何一个，因此

$$\mathrm{P}(\text{卖给所有人}) = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}.$$

第 (ii) 部分

以 1 表示付 £1 的顾客，以 2 表示付 £2 的顾客，并列出所有开头。

- 若第一人是 2，我立即卡住。
- 若队伍以 $1,2,2$ 开头，则 c 依次为 $1,0$，我在第三人时卡住。
- 若队伍以 $1,1$ 开头，则两人之后 $c = 2$。付 £2 的顾客总共只有两位，而 c 只会在服务其中一人时下跌，因此 c 永远不会跌至 $2-2=0$ 以下。成功。
- 若队伍以 $1,2,1$ 开头，则 c 依次为 $1,0,1$，而只剩一位付 £2 的顾客，因此 c 永远不会跌至 0 以下。成功。

这些情况涵盖了所有可能，因此我能服务所有人，当且仅当队伍以 $1,1$ 或 $1,2,1$ 开头。从队头开始建构队伍，

$$\mathrm{P}(1,1) = \frac{m}{m+2}\cdot\frac{m-1}{m+1}, \quad \mathrm{P}(1,2,1) = \frac{m}{m+2}\cdot\frac{2}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m} = \frac{2(m-1)}{(m+2)(m+1)}.$$

这两个事件互斥（disjoint），因此

$$\mathrm{P}(\text{卖给所有人}) = \frac{m(m-1)+2(m-1)}{(m+2)(m+1)} = \frac{(m-1)(m+2)}{(m+2)(m+1)} = \frac{m-1}{m+1},$$

即为所求。（我们需要 $m \geq 2$，使最后一个因子中尚余 $m-1 \geq 1$ 位 £1 顾客。）

第 (iii) 部分

现在有三位付 £2 的顾客。同样地，看队伍最前面的三个人。

- 以 2 开头，或以 1,2,2 开头：卡住，与 (ii) 完全相同。
- 以 1,1,1 开头：此时 $c=3$，三位 £2 顾客最多只能把 c 减至 0。成功。
- 以 1,1,2 或 1,2,1 开头：两种情况下，三人之后都有 $c=1$，而余下的是 $m-2$ 位持 £1 硬币的人和 2 位持 £2 硬币的人，以随机次序排列。

> **想一想** 在最后一种情况中，队伍余下的部分何时会出问题?

以 $c=1$ 开始处理队伍余下的部分，就好比在一条有两位 £2 顾客的队伍前面，多了一位免费的 £1 顾客，这正是改头换面的第 (ii) 部分。在 $c=1$ 且只剩两位 £2 顾客的情况下，我卡住当且仅当接下来两人都是 £2 顾客：c 先变成 0，然后我便无法服务。若接下来两人中有任何一人持 £1 硬币，则 c 永远不会跌至 0 以下（仿照 (ii) 检查 $1,\ldots$ 和 $2,1,\ldots$ 即可）。在首三人之后余下的 m 人中，

$$\mathrm{P}(\text{接下来两人都是2})=\frac{2}{m}\cdot\frac{1}{m-1},$$
$$\text{故}\quad \mathrm{P}(\text{其余部分成功})=1-\frac{2}{m(m-1)}=\frac{(m-2)(m+1)}{m(m-1)},$$

这里用了 $m^2-m-2=(m-2)(m+1)$。

设 $D=(m+3)(m+2)(m+1)$。各个有用开头的概率为

$$\mathrm{P}(1,1,1)=\frac{m(m-1)(m-2)}{D},$$
$$\mathrm{P}(1,1,2)=\frac{m\cdot(m-1)\cdot 3}{D},\qquad \mathrm{P}(1,2,1)=\frac{m\cdot 3\cdot(m-1)}{D}.$$

由于各个开头互斥，而且无论开头如何，队伍余下的部分同样是随机次序，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{成功})&=\frac{m(m-1)(m-2)}{D}+\frac{6m(m-1)}{D}\cdot\frac{(m-2)(m+1)}{m(m-1)}\\&=\frac{(m-2)\left[m(m-1)+6(m+1)\right]}{D}=\frac{(m-2)(m^2+5m+6)}{D}\\&=\frac{(m-2)(m+2)(m+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}=\frac{m-2}{m+1},\end{aligned}$$

即为所求。（这里 $m\geq 3$ 确保 $m-1\geq 2$，使条件概率（conditional probability）有意义。）

验算

- 最小的情况：当 $m=n$ 时，对 $n=1,2,3$，公式分别给出 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$。当 $m=n=2$ 时，由 1 和 2 组成的六种排列模式等可能，而只有 1122 和 1212 成功：$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$。✓

- m 很大时：三个概率都趋向 1，这在 £1 硬币充裕时理应如此。
- 通过完整列举所有队伍次序，当 $m = 5$ 时，对 $n = 1, 2, 3$ 我得到 $\frac{5}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{2}$，与 $\frac{m}{m+1}$、$\frac{m-1}{m+1}$、$\frac{m-2}{m+1}$ 吻合；这些公式亦已对直至 14 的每个 m 作精确验证。

常见错误

- 忘记我收到的 £2 硬币不能用来找零：只有 £1 硬币才算数。
- 把每个人当作以固定概率 $\frac{m}{m+n}$ 独立抽出。队伍是以不放回抽样（without replacement）的方式产生的，所以概率会随着人逐一排入而改变。
- 在 (iii) 中，以为三人之后 $c = 1$ 必定安全，因而漏掉了失败情况 1, 1, 2, 2, 2 或 1, 2, 1, 2, 2。

STEP 之外

对每个 $n \leq m$，规律都是 $\frac{m+1-n}{m+1}$。这就是*选票问题*（ballot problem），最简洁的证明运用了*反射原理*（reflection principle）：一条触及卡住水平的路径可以经反射得到一条终点不同的路径，从而把坏队伍的数目化为单一个二项式系数（binomial coefficient）。当 $m = n$ 时，好队伍的数目是一个卡特兰数（Catalan number），它在组合数学中随处可见。关于随机游走（random walk）和反射原理，可参阅 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。