详细解答

# STEP I 2011，第 11 题

力学 • 刚体的平衡

**STEP I 2011，第 11 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

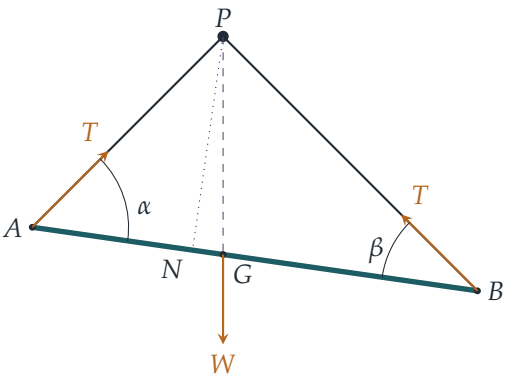
step.maths.org/questions/11-s1-q11

## 关键思路

杆上只受三个力：绳在 $A$ 和 $B$ 两点的张力（tension），以及作用于 $G$ 的重量。由于钉子光滑（smooth），两个张力相等，因此对 $G$ 取力矩（moments）（重量对 $G$ 没有力矩），便立即得出两个角之间的关系。第二部分还需要一个事实：处于平衡（equilibrium）而又不全部平行的三个力，必定通过同一点。这一点就是钉子，所以 $PG$ 是铅垂的。

## 解答

我们把杆视为刚体杆（rigid rod），绳为轻（light）而不可伸长（inextensible）的，钉子为光滑的。设杆的重量为 $W$。



**证明** $3\sin\alpha = 4\sin\beta$

绳是轻的，并绕过光滑的钉子，所以整条绳的张力 $T$ 都相同。因此杆在 $A$ 受到沿 $AP$ 方向的力 $T$，在 $B$ 受到沿 $BP$ 方向的力 $T$，另外还有在 $G$ 铅垂向下作用的 $W$。

对 $G$ 取力矩。重量没有力矩。由 $G$ 到直线 $AP$ 的垂直距离是 $AG\sin\alpha = 3d\sin\alpha$，由 $G$ 到直线 $BP$ 的垂直距离是 $GB\sin\beta = 4d\sin\beta$，因为 $GB = 7d - 3d = 4d$。$A$ 点的张力使杆绕 $G$ 向一个方向转动，$B$ 点的张力则使杆向另一个方向转动，所以平衡时

$$T\cdot 3d\sin\alpha = T\cdot 4d\sin\beta \quad\Longrightarrow\quad 3\sin\alpha = 4\sin\beta,$$

（两边除以 $Td \neq 0$）即为所求。

### 绳的长度

由 $\cos\beta = \frac{4}{5}$ 得 $\sin\beta = \frac{3}{5}$（$\beta$ 是三角形的一个角，所以 $\sin\beta > 0$）。于是

$$\sin\alpha = \tfrac{4}{3}\sin\beta = \tfrac{4}{5}, \qquad \cos\alpha = \tfrac{3}{5},$$

这里取正根，因为 $\alpha$ 是锐角（acute）。接着

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{5} = 0,$$

而 $0 < \alpha+\beta < \pi$，所以 $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$。因此三角形 $PAB$ 在 $P$ 处是直角，斜边（hypotenuse）为 $AB = 7d$。故此

$$PA = 7d\cos\alpha = \tfrac{21}{5}d, \qquad PB = 7d\cos\beta = \tfrac{28}{5}d,$$

而绳的长度是

$$PA + PB = \tfrac{49}{5}d.$$

### 杆的倾角

**想一想** 我们知道 $P$ 相对于杆的位置，但“铅垂”方向在哪里？

两个张力都沿通过 $P$ 的直线作用，所以它们的合力（resultant）也通过 $P$。平衡时这个合力必须与重量抵消，因此它必须与 $W$ 大小相等、方向相反，并且在同一直线上。（处于平衡的三个不平行的力必定共点（concurrent）。）所以通过 $G$ 的铅垂线经过 $P$：$PG$ 是铅垂的。

设 $N$ 为由 $P$ 到 $AB$ 的垂线的垂足。在直角三角形 $PAN$ 中，

$$AN = PA\cos\alpha = \tfrac{21}{5}d\cdot\tfrac{3}{5} = \tfrac{63}{25}d, \qquad PN = PA\sin\alpha = \tfrac{21}{5}d\cdot\tfrac{4}{5} = \tfrac{84}{25}d.$$

由于 $AN = \frac{63}{25}d < 3d = AG$，点 $N$ 位于 $A$ 与 $G$ 之间，且

$$NG = 3d - \tfrac{63}{25}d = \tfrac{12}{25}d.$$

在直角三角形 $PNG$ 中，

$$\tan\angle PGN = \frac{PN}{NG} = \frac{84}{12} = 7.$$

角 $PGN$ 是杆与铅垂线 $GP$ 之间、在 $A$ 一侧量度的角。它是锐角，所以端点 $A$ 在通过 $G$ 的水平线之上，而 $B$ 在其之下，与题目给出的位置相符。杆与水平线之间的角 $\theta$ 等于 $\frac{\pi}{2} - \angle PGN$，所以

$$\tan\theta = \frac{1}{\tan\angle PGN} = \frac{1}{7}, \qquad \text{即} \qquad \theta = \arctan\tfrac{1}{7},$$

即为所求。

## 验算

- 绳长 $\frac{49}{5}d = 9.8d$ 比杆长 $7d$ 长，符合三角形 $PAB$ 中三角不等式（triangle inequality）的要求。
- 两个相等张力的合力平分它们之间的夹角，所以 $PG$ 平分角 $APB$。根据角平分线定理（angle bisector theorem），$PA : PB$ 应等于 $AG : GB = 3 : 4$，而 $\frac{21}{5} : \frac{28}{5} = 3 : 4$，确实如此。
- 作为数值验算，我们把 $P$ 放在以 $A$ 和 $B$ 为焦点（foci）的椭圆（ellipse）上（即在这个绳长下钉子所有可能的位置），然后找出使 $G$ 在 $P$ 之下的深度取驻定值（stationary）的倾角。结果是 $8.13°$，与 $\arctan\frac{1}{7} \approx 8.130°$ 吻合。

## 常见错误

- 给绳的两段设置不同的张力。光滑的钉子不能改变轻绳中的张力。
- 把两段距离对调，得出 $4\sin\alpha = 3\sin\beta$。较长的一段 $GB = 4d$ 应配 $B$ 处的角。
- 忘记 $\alpha$ 是锐角，而容许 $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$。这会得出另一个三角形，而在其中 $\alpha + \beta$ 并不是直角。

## STEP 之外

在绳长固定的情况下，钉子必定位于以 $A$ 和 $B$ 为焦点的椭圆上。于是，$PG$ 平分角 $APB$ 这个事实正是椭圆的反射性质（reflection property）：在 $P$ 点的法线（normal）平分两条

焦半径（focal radii）之间的夹角。此外，平衡位置恰好就是势能（potential energy）取驻定值的位置，这正是大学一年级课程中虚功原理（principle of virtual work）和拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）的起点。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）是学习平衡、力矩和能量方法的好读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。