详细解答

STEP I 2011，第 10 题

力学 · 弹性碰撞

STEP I 2011，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s1-q10

关键思路

两个质点（particle）都由同一点从静止开始运动，而在释放与碰撞之间发生的一切（自由下落、一次完全弹性（perfectly elastic）的反弹）都不会损失任何能量。因此在任一高度，每个质点的速率都相同，而它们会在同一高度相遇。之后，碰撞就是一道标准的两条方程问题（动量（momentum）守恒，以及 $e = 1$ 的牛顿碰撞定律（Newton's law of restitution）），而 B 的最大高度再次由能量求得。

解答

我们把 A 和 B 视为质点，忽略空气阻力（air resistance），并全程取向上为正方向。

为何两者速率相等

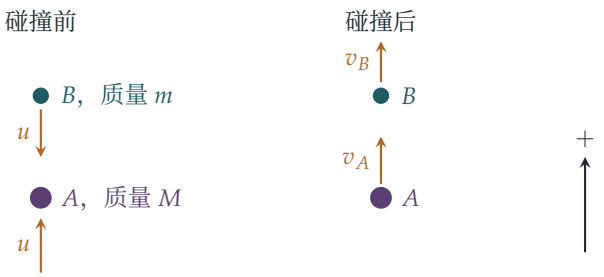
每个质点都在高度 h 处由静止开始运动。自由飞行期间只有重力作用，所以机械能守恒（conservation of mechanical energy）；A 在平面上的反弹是完全弹性的，因此它只会令 A 的速度反向而不改变其速率，那里也没有损失能量。故此，在第一次碰撞之前，每个质点的单位质量总能量都是 gh，而处于高度 y 的质点的速率 v 满足

$$\tfrac{1}{2}v^2 + gy = gh, \qquad \text{所以} \qquad v = \sqrt{2g(h-y)}.$$

速率只取决于高度，与质量或质点过去的运动经历无关。在第一次碰撞的一刻，两个质点处于同一高度 y，所以它们的速率相等。此外，A 尚未回到 P，所以 $y < h$，而这个共同速率 $u = \sqrt{2g(h-y)}$ 是正数。由于 A 已经反弹，它正向上运动；而 B（从未反弹）则正向下运动。

碰撞

碰撞前一刻，A 的速度为 $+u$，B 的速度为 $-u$。设碰撞后一刻两者的速度分别为 v_A 和 v_B。



碰撞中的冲力（impulsive force）是这对质点之间的内力，而在撞击的一瞬间重力不产生任何冲量（impulse），所以动量守恒：

$$Mu - mu = Mv_A + mv_B. \tag{1}$$

碰撞是完全弹性的（$e = 1$），所以分离速率等于接近速率：

$$v_B - v_A = u - (-u) = 2u. \tag{2}$$

把由 (2) 得到的 $v_B = v_A + 2u$ 代入 (1)：

$$(M-m)u = (M+m)v_A + 2mu \quad \Longrightarrow \quad v_A = \frac{(M-3m)u}{M+m},$$

然后

$$v_B = v_A + 2u = \frac{(M-3m)u + 2(M+m)u}{M+m} = \frac{(3M-m)u}{M+m}.$$

由于 $M > 3m$，我们有 $M - 3m > 0$，所以 $v_A > 0$；而 $v_B = v_A + 2u > 0$ 亦成立。因此第一次碰撞后两个质点都向上运动，正如题目所要求。

想一想 我们怎样知道 B 在下一次与 A 相遇之前，确实能到达其飞行的最高点？

碰撞后两个质点的加速度都是 $-g$，所以两者都在飞行时，相对速度一直保持 $v_B - v_A = 2u$：B 以稳定的速率离 A 而去，因此在 A 再次撞到平面之前，两者不可能相遇。若 A 在 B 仍在上升时反弹，就比较两者的单位质量能量：B 的是 $\frac{1}{2}v_B^2 + gy$，A 的是 $\frac{1}{2}v_A^2 + gy$；由于 $v_B > v_A > 0$，后者较小（而 A 的反弹不改变其能量）。所以每当两者处于同一高度时，A 的速率都小于 B 的速率。要在 B 仍在上升时从下方追上 B，A 在相遇一刻向上的速率必须至少与 B 一样快，而我们刚刚看到这是不可能的。因此第二次碰撞只会在 B 经过其最高点之后才发生，而这个最高点正是题目所求的最大高度。

B 的最大高度

碰撞发生在高度 y 处，其中 $u^2 = 2g(h-y)$，即

$$y = h - \frac{u^2}{2g}.$$

碰撞后 B 以初速率 v_B 只在重力作用下上升，所以它会再上升 $v_B^2/(2g)$（由 $v^2 = v_B^2 - 2gs$ 并取 $v = 0$ 得出）。因此它的最大高度是

$$\begin{aligned} y + \frac{v_B^2}{2g} &= h - \frac{u^2}{2g} + \frac{(3M-m)^2u^2}{2g(M+m)^2} \\ &= h + \frac{u^2}{2g(M+m)^2}\left[(3M-m)^2 - (M+m)^2\right] \\ &= h + \frac{u^2}{2g(M+m)^2}(2M-2m)(4M) \\ &= h + \frac{4M(M-m)u^2}{(M+m)^2 g}, \end{aligned}$$

其中第三行用了平方差（difference of two squares）公式。这正是所求的结果。

验算

- 能量：以上述的 v_A 和 v_B，有 $Mv_A^2 + mv_B^2 = (M+m)u^2$，正如弹性碰撞所要求。
- 极限情况（limiting case）：若 $m \to 0$，则 $v_A \to u$ 而 $v_B \to 3u$（一个极轻的球撞上一个重球，就像撞上一道移动的墙一样反弹，相对于它以速度 $2u$ 离开），而高度变为 $h + 4u^2/g$，与 $y + 9u^2/(2g)$ 吻合。
- 由于 $M > m$，额外高度是正数：B 最终到达 P 之上，这是理所当然的，因为它从 A 获得了能量。
- 数值方面，我们在随机时间释放 B，取随机的 h 及满足 $M > 3m$ 的质量，逐步模拟运动（包括 A 其后的反弹）直至第二次碰撞，发现 B 的最大高度与公式吻合，相对误差约为 10^{-10}。

常见错误

- 正负号错误：把碰撞前两个速度都取作 $+u$，就忘记了 A 正在上升时 B 正在下落。
- 把额外上升的高度 $v_B^2/(2g)$ 从平面或从 P 起计，而不是从碰撞高度 $h - u^2/(2g)$ 起计。

STEP 之外

“速率只取决于高度”这个论证，其实就是保守力（conservative force）下的能量守恒：某一点的速率只取决于该点的势能（potential energy），与所走的路径无关。碰撞本身通常在质心参考系（centre-of-mass frame）中处理最为简单：在该参考系中，弹性碰撞只是把每个质点的速度反向；再变换回原参考系，一行便得到 v_A 和 v_B。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）仔细地发展了这两个概念。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。