详细解答

STEP I 2011，第 1 题

纯数学 • 隐函数微分法

STEP I 2011，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/11-s1-q1

关键思路

用隐函数求导（implicit differentiation），毋须把 y 解出来，就能得到每条曲线的斜率（gradient）。之后每一部分都只需写出交点 (p,q) 须满足的条件：它在直线上、它在曲线上，而两者的斜率之间有某种关系（相切时相等，法线（normal）时乘积为 -1）。斜率条件给出 p 与 q 之间一个简单的关系；把这关系代入另外两条方程，便可用两种不同方法确定 p，而两者必须一致。

解答

第 (i) 部分

把 y 视为 x 的函数（function），将 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$ 对 x 求导，得

$$-\frac{a}{x^2}-\frac{b}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

由于 $b\neq 0$，可移项得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{ay^2}{bx^2},$$

此即所求。（曲线上每一点的 x 和 y 均不为零，因为方程中含有 a/x 和 b/y。）

斜率相等。直线 $ax+by=1$ 的斜率为 $-\frac{a}{b}$。曲线在 (p,q) 的斜率为 $-\frac{aq^2}{bp^2}$，因此

$$-\frac{aq^2}{bp^2}=-\frac{a}{b}\quad\Longrightarrow\quad\frac{q^2}{p^2}=1\quad\Longrightarrow\quad q^2=p^2,$$

其中我们约去了 a/b，这是容许的，因为 $a\neq 0$。故 $p=\pm q$。

两种情况。点 (p,q) 亦满足

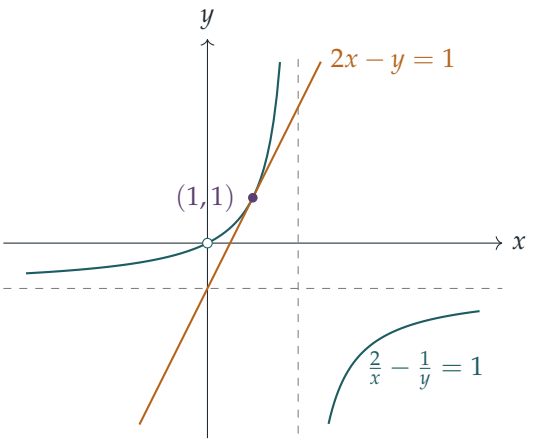
$$ap+bq=1 \qquad 及 \qquad \frac{a}{p}+\frac{b}{q}=1.$$

- 若 $q=p$：由直线得 $p(a+b)=1$，所以 $p=\dfrac{1}{a+b}$（特别地，$a+b\neq 0$）。由曲线得 $\dfrac{a+b}{p}=1$，所以 $p=a+b$。比较两者，得 $a+b=\dfrac{1}{a+b}$，即 $(a+b)^2=1$。
- 若 $q=-p$：由直线得 $p(a-b)=1$，所以 $p=\dfrac{1}{a-b}$。由曲线得 $\dfrac{a-b}{p}=1$，所以 $p=a-b$。比较两者，得 $(a-b)^2=1$。

所以 $(a-b)^2=1$ 或 $(a+b)^2=1$，此即所求。

> **想一想** 这样的点真的存在吗？还是我们只找到了一个必要条件（necessary condition）？

它们确实存在。取 $a=2$、$b=-1$，则 $a+b=1$。点 $(1,1)$ 既在直线 $2x-y=1$ 上，亦在曲线 $\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=1$ 上，而两者在该点的斜率都是 2。这里曲线为 $y=\dfrac{x}{2-x}$，即去掉原点的一条直角双曲线（rectangular hyperbola）。在公共点上斜率相等，表示该直线是切线（tangent）：



空心圆圈标示原点：它在双曲线 $y=\frac{x}{2-x}$ 上，但不在原曲线上。

第 (ii) 部分

将 $\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=1$ 隐函数求导，

$$-\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ay^2}{bx^2}.$$

假设直线在 (p,q) 是曲线的法线。那么 $p\neq 0$、$q\neq 0$，而且

$$ap+bq=1 \qquad 及 \qquad \frac{a}{p}-\frac{b}{q}=1.$$

切线斜率 $\dfrac{aq^2}{bp^2}$ 与直线斜率 $-\dfrac{a}{b}$ 都是有限且非零的，因为 a、b、p、q 全不为零。所以“法线”即表示两者乘积为 -1：

$$\frac{aq^2}{bp^2}\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)=-1 \quad\Longrightarrow\quad a^2q^2=b^2p^2 \quad\Longrightarrow\quad aq=\pm bp.$$

想一想 哪一个正负号是可能的?

把每个符号代入曲线方程检验。

- 若 $aq=bp$，则 $\dfrac{b}{q}=\dfrac{a}{p}$，所以 $\dfrac{a}{p}-\dfrac{b}{q}=0\neq 1$。这个符号不可能。
- 若 $aq=-bp$,则 $\dfrac{b}{q}=-\dfrac{a}{p}$,于是曲线方程变为 $\dfrac{2a}{p}=1$,得 $p=2a$,从而 $q=-\dfrac{bp}{a}=-2b$。

把 $p=2a$、$q=-2b$ 代入直线方程，得

$$2a^2-2b^2=1, \qquad 即 \qquad a^2-b^2=\tfrac{1}{2},$$

此即所求。法线的垂足为点 $(2a,-2b)$。

验算

- 对于第 (i) 部分, 上面 $a=2$、$b=-1$ 的例子满足 $(a+b)^2=1$, 而直线在 $(1,1)=(p,p)$ 相切。同样, $a=2$、$b=1$ 满足 $(a-b)^2=1$, 而直线 $2x+y=1$ 在 $(1,-1)$ 与 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$ 相切。
- 对于第 (ii) 部分，取 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$、$b=\frac{1}{2}$，使 $a^2-b^2=\frac{1}{2}$，并取点 $(2a,-2b)=(\sqrt{3},-1)$。直线给出 $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$，曲线给出 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$。该点的切线斜率为 $\dfrac{aq^2}{bp^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0.577$，直线斜率为 $-\sqrt{3}\approx -1.732$，乘积为 -1。
- 数值上，在数以百计的随机点，斜率公式都与有限差分（finite difference）所得的斜率吻合；而对 (a,b) 作随机搜索，只有当 a^2-b^2 在舍入误差范围内等于 0.5 时才会找到法线。

常见错误

- 在第 (i) 部分遗漏 $q=-p$ 的情况：正是这个情况给出 $(a-b)^2=1$。

► 在第 (ii) 部分停在 $aq = \pm bp$，没有检查曲线容许哪一个符号。

STEP 之外

隐函数求导让我们初窥隐函数定理（implicit function theorem）：在任何满足 $\partial F/\partial y \neq 0$ 的点附近，方程 $F(x,y) = 0$ 把 y 定义为 x 的可微函数，且 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -F_x/F_y$。这里的相切论证亦有一个代数上的“孪生”版本：一条直线与一条圆锥曲线（conic）相切，当且仅当求两者交点的二次方程有重根（repeated root）；你可以用这方法重新推导第 (i) 部分。若想了解这一切背后的分析（analysis），可读 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。