详细解答

STEP III 2010，第 9 题

力学 • 圆上的运动

STEP III 2010，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

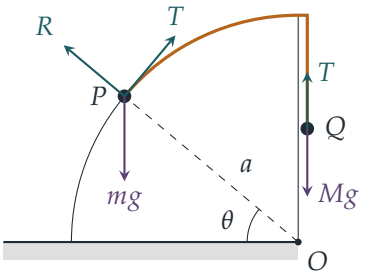
step.maths.org/questions/10-s3-q9

关键思路

由于绳子不可伸长（inextensible），而木块光滑（smooth），P 和 Q 始终以相同的速率运动，而且整个系统的能量守恒（conservation of energy）。这样便能把 P 的速率写成 θ 的函数（function），完全不用解任何微分方程（differential equation）。接着，由于 P 在圆周上运动，沿指向 O 的方向分解力，便可求出法向反作用力（normal reaction）。保持接触即表示这个反作用力始终非负，而利用凹性（concavity）论证，可知只需检查木块顶部的情况便足够。

解答

模型。 P 和 Q 是质点（particle），绳子轻而不可伸长，木块光滑，因此整条绳子上的张力（tension）T 处处相同。设 P 位于圆弧上角度 θ 的位置。绳子由 P 沿圆弧伸延至木块顶部，然后沿铅垂面旁边垂直向下连到 Q。



速率。 当 P 由 $\theta = 0$ 移动到 θ 时，它走过了长度为 $a\theta$ 的圆弧，因此 Q 下降了距离 $a\theta$。两者都以速率 $v = a\dot{\theta}$ 运动。与此同时，P 上升了高度 $a\sin\theta$。木块光滑，而绳子对整个系统不做净功（因为它不可伸长），所以能量守恒。由静止开始，

$$\tfrac{1}{2}(m+M)v^2 = Mga\theta - mga\sin\theta, \qquad \text{所以} \qquad v^2 = \frac{2ga\,(M\theta - m\sin\theta)}{m+M}.$$

由于 $M\theta > m\theta \geq m\sin\theta$，此式在 $0 < \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ 时为正，所以系统确实会由静止开始运动。

法向反作用力。 P 绕 O 沿半径为 a 的圆周运动，因此它指向 O 的加速度为 v^2/a。作用于 P 的力如下：

- 沿 OP 方向、背离 O 的反作用力 R；
- 沿切线（tangent）方向的张力 T，它没有径向分量；
- 重力 mg，由于 OP 与水平方向成角 θ，它指向 O 的分量为 $mg\sin\theta$。

沿指向 O 的方向分解，

$$mg\sin\theta - R = \frac{mv^2}{a} = \frac{2mg\,(M\theta - m\sin\theta)}{m+M}.$$

因此

$$\begin{aligned} R &= \frac{mg\big[(m+M)\sin\theta - 2M\theta + 2m\sin\theta\big]}{m+M} \\ &= \boxed{\frac{mg\big[(3m+M)\sin\theta - 2M\theta\big]}{m+M}.} \end{aligned}$$

想一想 对 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 内的每一个 θ，R 都必须非负。我们是否需要找出 R 的最小值?

条件。 P 保持接触，当且仅当 $R \geq 0$ 在整个过程中成立，即

$$f(\theta) = (3m+M)\sin\theta - 2M\theta \geq 0 \quad \text{对所有} 0 \leq \theta \leq \tfrac{1}{2}\pi.$$

我们不需要求最小值。由于在这个区间上 $f''(\theta) = -(3m+M)\sin\theta \leq 0$，$f$ 是凹函数，所以它的图像位于连接两个端点的弦（chord）之上或弦上。又因为 $f(0) = 0$，所以：

- *必要性（necessity）*。若 P 在 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 时仍保持接触，则 $f(\frac{1}{2}\pi) = 3m + M - \pi M \geq 0$。
- *充分性（sufficiency）*。若 $f(\frac{1}{2}\pi) \geq 0$，则由 $(0,0)$ 到 $(\frac{1}{2}\pi, f(\frac{1}{2}\pi))$ 的弦位于横轴之上或横轴上。由凹性可知 f 位于弦之上或弦上，所以在整个区间上 $f \geq 0$。

因此条件是 $3m \geq (\pi - 1)M$，即

$$\frac{m}{M} \geq \frac{\pi - 1}{3},$$

得证。注意 $(\pi - 1)/3 \approx 0.714 < 1$，所以这与 $m < M$ 并无矛盾。

验算

- 当 $\theta = 0$ 时，得 $R = 0$。这是正确的：开始时 P 位于木块底部，半径 OP 是水平的，P 的重量由桌面承托。
- 对 P 沿切线方向分解、对 Q 沿铅垂方向分解，可得 $T = \dfrac{Mmg(1 + \cos\theta)}{m + M} > 0$，所以绳子在整个过程中确实保持拉紧。
- 数值上，取 $m = 0.8$、$M = 1$ 及 $a = 1$（比值 $0.8 > 0.714$），逐步数值求解运动方程（equation of motion），并用牛顿第二定律（Newton's second law）计算 R，结果与公式吻合至 10^{-13}，而且 R 始终非负。若取 $m/M = \frac{2}{3}$，则 R 在接近顶部时为负。

常见错误

- 忘记 Q 也有动能（kinetic energy），因而写成 $\frac{1}{2}mv^2$ 而非 $\frac{1}{2}(m + M)v^2$。
- 把张力放进径向方程。在光滑表面上，绳子沿 P 点的切线方向。
- 只检查 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 时 $R \geq 0$，却没有说明为何这样已经足够。正是 f 的凹性令这样做足够。

STEP 之外

在这里，能量守恒代替了求解运动方程 $(m + M)a\ddot{\theta} = g(M - m\cos\theta)$。这就是首次积分（first integral）的概念，它在拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）中处于核心地位：绳子是一个约束（constraint），而单一个坐标 θ 便能描述整个系统。本题属于“珠子离开球面”这一类问题，Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对这类问题有详细的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。