详细解答

STEP III 2010，第 8 题

纯数学 • 利用商法则积分

STEP III 2010，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s3-q8

关键思路

表达式 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R}$ 正是对商 R/Q 求导时得到的分子（numerator）。因此，只要能找到一个 R 产生所给的 P，任何形如 P/Q^2 的被积函数（integrand）都可以一眼积出来。在两个部分中，分母都告诉我们 Q 是甚么，然后我们通过比较系数（comparing coefficients）求出 R。在第 (ii) 部分，微分方程（differential equation）的左边原来恰好是 $\mathrm{Q}y' - \mathrm{Q}'y$，即是同一个结构换了个样子出现。

解答

一般积分

由商法则（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\right) = \frac{\mathrm{Q}(x)\mathrm{R}'(x) - \mathrm{Q}'(x)\mathrm{R}(x)}{(\mathrm{Q}(x))^2} = \frac{\mathrm{P}(x)}{(\mathrm{Q}(x))^2},$$

所以

$$\int \frac{\mathrm{P}(x)}{(\mathrm{Q}(x))^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)} + C.$$

第 (i) 部分

这里 $\mathrm{Q}(x) = 1 + 2x + 3x^2$，所以 $\mathrm{Q}'(x) = 2 + 6x$。设 $\mathrm{R}(x) = a + bx + cx^2$，则 $\mathrm{R}'(x) = b + 2cx$，

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} &= (1 + 2x + 3x^2)(b + 2cx) - (2 + 6x)(a + bx + cx^2) \\ &= (b - 2a) + (2c - 6a)x + (2c - 3b)x^2.\end{aligned}$$

（两个乘积各自产生的 x^3 项 $6cx^3$ 互相抵消。）我们需要它等于 $5x^2 - 4x - 3$，所以

$$b - 2a = -3, \qquad 2c - 6a = -4, \qquad 2c - 3b = 5.$$

由头两条得 $b = 2a - 3$ 及 $c = 3a - 2$。代入第三条，

$$2(3a - 2) - 3(2a - 3) = 6a - 4 - 6a + 9 = 5,$$

这对任何 a 都成立。所以第三条方程没有提供新信息，每个 a 值都可行：

$$\mathrm{R}(x) = a + (2a - 3)x + (3a - 2)x^2.$$

取 $a = 1$ 得到最整洁的选择 $\mathrm{R}(x) = 1 - x + x^2$，因此

$$\int \frac{5x^2 - 4x - 3}{(1 + 2x + 3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - x + x^2}{1 + 2x + 3x^2} + C.$$

分母永不为零（其判别式（discriminant）为 $4 - 12 < 0$），所以此式对所有实数 x 成立。

不唯一性。 我们刚看到有效的 R 组成一个单参数族，所以选择并不唯一：例如 $a = 0$ 给出 $\mathrm{R} = -3x - 2x^2$，$a = 1$ 给出 $\mathrm{R} = 1 - x + x^2$，两者都可行。把一般 a 的选择与 $a = 0$ 的选择比较，

$$(a + (2a - 3)x + (3a - 2)x^2) - (-3x - 2x^2) = a + 2ax + 3ax^2 = a\,\mathrm{Q}(x).$$

? **想一想** 为甚么在 R 上加上 Q 的倍数不会带来任何分别?

若以 $\mathrm{R} + k\mathrm{Q}$ 取代 R，其中 k 为常数，则

$$\mathrm{Q}(\mathrm{R} + k\mathrm{Q})' - \mathrm{Q}'(\mathrm{R} + k\mathrm{Q}) = \mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} + k(\mathrm{QQ}' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q}) = \mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R},$$

所以 P 不变。相应地，答案 R/Q 变成 $\mathrm{R}/\mathrm{Q} + k$：不同的 R 给出的原函数（antiderivative）只相差一个常数，而这个常数会被任意的积分常数（constant of integration）吸收。例如，

$$\frac{1 - x + x^2}{1 + 2x + 3x^2} = \frac{-3x - 2x^2}{1 + 2x + 3x^2} + 1.$$

第 (ii) 部分

设 $\mathrm{Q}(x) = 1 + \cos x + 2\sin x$。则 $\mathrm{Q}'(x) = -\sin x + 2\cos x$，所以方程中 y 的系数 $\sin x - 2\cos x$ 恰好是 $-\mathrm{Q}'(x)$。因此方程为

$$\mathrm{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \mathrm{Q}'y = 5 - 3\cos x + 4\sin x.$$

在任何 $\mathrm{Q} \neq 0$ 的区间上，我们除以 Q^2，并看出左边是一个商的导数：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\mathrm{Q}}\right) = \frac{5 - 3\cos x + 4\sin x}{\mathrm{Q}^2}.$$

（换句话说，$1/\mathrm{Q}^2$ 是一个积分因子（integrating factor）。）要积出右边，我们寻找一个 R 使得 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} = 5 - 3\cos x + 4\sin x$。仿照 Q 的形式，试设 $\mathrm{R} = a + b\cos x + c\sin x$，于是 $\mathrm{R}' = -b\sin x + c\cos x$。展开，

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}' &= -b\sin x + c\cos x + (2c - b)\sin x\cos x + c\cos^2 x - 2b\sin^2 x,\\ \mathrm{Q}'\mathrm{R} &= -a\sin x + 2a\cos x + (2c - b)\sin x\cos x + 2b\cos^2 x - c\sin^2 x.\end{aligned}$$

相减后，$\sin x\cos x$ 项互相抵消，而平方项合并为 $(c - 2b)(\cos^2 x + \sin^2 x) = c - 2b$。所以

$$\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} = (c - 2b) + (c - 2a)\cos x + (a - b)\sin x.$$

与 $5 - 3\cos x + 4\sin x$ 比较：

$$c - 2b = 5, \qquad c - 2a = -3, \qquad a - b = 4.$$

第一条方程减去第二条得 $2a - 2b = 8$，又是第三条方程，所以与第 (i) 部分一样有一个自由参数，原因也相同。取 $b = 0$ 得 $c = 5$、$a = 4$，所以 $\mathrm{R} = 4 + 5\sin x$。因此

$$\frac{y}{\mathrm{Q}} = \frac{4 + 5\sin x}{1 + \cos x + 2\sin x} + C,$$

而通解（general solution）为

$$y = 4 + 5\sin x + C(1 + \cos x + 2\sin x),$$

其中 C 为任意常数。虽然我们求解时除以了 Q，但直接代入可以确认这个函数对每个 x 都满足方程。其他 b 的选择只会令 C 平移：例如 $b = -2$ 给出 $\mathrm{R} = 2 - 2\cos x + \sin x = (4 + 5\sin x) - 2\mathrm{Q}$。

验算

- 在第 (i) 部分，由我们的原函数，被积函数的 $\int_0^1$ 应为 $\frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6}$；辛普森法则（Simpson's rule）给出 $-0.83333\ldots$，而且对每个 a 的选择，在随机区间上结果都吻合。

- 在第 (ii) 部分，代入 $y = 4 + 5\sin x$：左边为 $(1 + \cos x + 2\sin x)5\cos x - (2\cos x - \sin x)(4 + 5\sin x) = 5 - 3\cos x + 4\sin x$。而 $y = \mathrm{Q}$ 给出 $\mathrm{QQ}' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q} = 0$，即余函数（complementary function）。
- 以数值方法（龙格－库塔法（Runge–Kutta））由 $y(0.5) = 1.7$ 解方程至 $x = 1.5$，得 3.910638，与取相应 C 的公式吻合。

常见错误

- 以为三个未知数的三条方程必定有唯一解。这里它们是相依的，而这正是不唯一性问题的重点所在。
- 在第 (ii) 部分弄错 Q' 的正负号：$\mathrm{Q}' = 2\cos x - \sin x$，所以 y 的系数是 $-\mathrm{Q}'$，而不是 $+\mathrm{Q}'$。
- 忘记在最终答案中积分常数是乘以 Q 的：通解是 $y = \mathrm{R} + C\mathrm{Q}$，而不是 $y = \mathrm{R} + C$。

STEP 之外

第 (ii) 部分的方程是一条一阶线性微分方程（first-order linear differential equation），其通解的形状是“特解（particular solution）加上齐次方程（homogeneous equation）之解的倍数”，这个模式贯穿所有线性问题。表达式 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R}$ 是 Q 与 R 的朗斯基行列式（Wronskian），它在二阶线性方程中担当核心角色，尤其是在降阶法（reduction of order）和参数变易法（variation of parameters）之中。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）同时涵盖积分因子和朗斯基行列式。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。