详细解答

STEP III 2010，第 7 题

纯数学 · 麦克劳林级数

STEP III 2010，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s3-q7

关键思路

整个解法的关键，在于摆脱那个麻烦的平方根：只要把 $\sqrt{1-x^2}\,y'$ 写成一个简洁的式子，再微分一次，二阶微分方程（second-order differential equation）便自然得出。之后反复微分，系数会呈现出一个规律，再用归纳法（induction）加以证明。把 $x=0$ 代入一般关系式，便得到麦克劳林系数（Maclaurin coefficients）的递推关系（recurrence）；当 m 为偶数时，这个递推关系会遇上一个等于零的因子，于是级数就此终止。

解答

微分方程

设 $\theta = \arcsin x$，则 $\sin\theta = x$，其中 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$；而当 $|x|<1$ 时，$\cos\theta = \sqrt{1-x^2} > 0$。于是 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，且 $y = \cos m\theta$，由链式法则（chain rule）得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m\sin m\theta}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{亦即,} \qquad \sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -m\sin m\theta.$$

将此式对 x 微分，左边使用乘积法则（product rule）：

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m^2\cos m\theta}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{m^2 y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

两边同乘 $\sqrt{1-x^2}$（它不等于零），得

$$(1-x^2)\,y'' - x\,y' + m^2 y = 0,$$

此即所求。（此处及以下，$y^{(n)}$ 表示 $\mathrm{d}^n y/\mathrm{d}x^n$。）

三阶及四阶方程

将刚证明的方程微分。乘积 $(1-x^2)y''$ 给出 $(1-x^2)y'''-2xy''$，而 xy' 给出 $xy''+y'$，因此

$$(1-x^2)\,y'''-3x\,y''+(m^2-1)\,y'=0.$$

以同样方法再微分一次，

$$(1-x^2)\,y^{(4)}-2x\,y'''-3x\,y'''-3y''+(m^2-1)\,y''=0,$$

故

$$(1-x^2)\,y^{(4)}-5x\,y'''+(m^2-4)\,y''=0.$$

一般关系式

x 的系数依次为 $1,3,5$，常数项依次为 m^2-0^2，m^2-1^2，m^2-2^2，因此我们猜想对每个整数 $n\geq 0$，

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,x\,y^{(n+1)}+(m^2-n^2)\,y^{(n)}=0. \qquad (*)$$

我们对 n 用归纳法证明。$n=0$ 的情况就是最先证明的方程。假设 $(*)$ 对某个 n 成立。将其微分，

$$\begin{aligned}(1-x^2)\,y^{(n+3)}-2x\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,x\,y^{(n+2)}&\\ -(2n+1)\,y^{(n+1)}+(m^2-n^2)\,y^{(n+1)}&=0.\end{aligned}$$

合并同类项，$x\,y^{(n+2)}$ 的系数为 $-(2n+3)=-(2(n+1)+1)$，而 $y^{(n+1)}$ 的系数为 $m^2-(n^2+2n+1)=m^2-(n+1)^2$。因此

$$(1-x^2)\,y^{(n+3)}-(2(n+1)+1)x\,y^{(n+2)}+(m^2-(n+1)^2)y^{(n+1)}=0,$$

这正是以 $n+1$ 代替 n 的 $(*)$。由归纳法，$(*)$ 对所有 $n\geq 0$ 成立。

麦克劳林级数

当 $x=0$ 时 $\theta=0$，故 $y(0)=\cos 0=1$，且 $y'(0)=-m\sin 0=0$。将 $x=0$ 代入 $(*)$，中间一项便消失：

$$y^{(n+2)}(0)=(n^2-m^2)\,y^{(n)}(0).$$

由于 $y'(0)=0$，所有奇数阶导数在 0 处均为零。至于偶数阶导数，

$$\begin{aligned}y''(0)&=(0-m^2)\cdot 1=-m^2,\\ y^{(4)}(0)&=(2^2-m^2)(-m^2)=m^2(m^2-2^2),\\ y^{(6)}(0)&=(4^2-m^2)\,m^2(m^2-2^2)=-m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2),\end{aligned}$$

一般而言 $y^{(2k)}(0) = (-1)^k m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\cdots(m^2-(2k-2)^2)$。因此麦克劳林级数（Maclaurin series）为

$$y = 1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\,x^4}{4!} - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\,x^6}{6!} + \cdots,$$

而首三个非零项为 $1 - \dfrac{m^2x^2}{2!} + \dfrac{m^2(m^2-2^2)x^4}{4!}$。（只要 $m \neq 0, \pm 2$，这些项都不为零；对于这些值，级数的项数较少，下一部分会加以解释。）

偶数 m

设 m 为偶数，并记 $|m| = 2p$。因子 $m^2 - (2p)^2$ 等于零，而一旦 $2k - 2 \geq 2p$，它便会出现在 $y^{(2k)}(0)$ 之中。所以阶数大于 $|m|$ 的每个导数在 $x = 0$ 处都等于零，麦克劳林级数在 $x^{|m|}$ 项便终止。

想一想 一个终止的级数只告诉我们函数在 $x = 0$ 这一点的各阶导数。我们怎样知道对每个 $|x| < 1$，y 真的等于这个多项式（polynomial）？

我们再次利用 $(*)$，这次是在整个区间上。取 $n = |m|$，使 $m^2 - n^2 = 0$，并设 $v = y^{(n+1)}$。于是 $(*)$ 变成

$$(1-x^2)\,v' - (2n+1)\,x\,v = 0 \qquad (|x| < 1).$$

这个一阶方程的积分因子（integrating factor）为 $(1-x^2)^{(2n-1)/2}$；事实上

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)^{(2n+1)/2}\,v\Big] = (1-x^2)^{(2n-1)/2}\Big[(1-x^2)\,v' - (2n+1)\,x\,v\Big] = 0,$$

所以 $(1-x^2)^{(2n+1)/2}\,v$ 在 $(-1,1)$ 上是常数。它在 $x = 0$ 的值为 $v(0) = y^{(n+1)}(0) = 0$，因为 $n+1$ 是奇数。因此 $v \equiv 0$，即对所有 $|x| < 1$，$y^{(|m|+1)}(x) = 0$，故 y 是次数最多为 $|m|$ 的多项式。多项式等于其本身的麦克劳林级数，所以对 $|x| < 1$，

$$\cos(m \arcsin x) = 1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\,x^4}{4!} - \cdots,$$

右边就是上面那个会终止的级数。

现在设 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$，并令 $x = \sin\theta$。则 $|x| < 1$，且 $\arcsin(\sin\theta) = \theta$（对 θ 的限制正是在这里用上），所以

$$\cos m\theta = 1 - \frac{m^2\sin^2\theta}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\sin^4\theta}{4!} - \cdots,$$

这是一个关于 $\sin\theta$ 的多项式，其开首各项与所求相符。

最后，$\sin^{|m|}\theta$ 的系数为 $y^{(|m|)}(0)/|m|!$，即 $\pm\, m^2(m^2-2^2)\cdots(m^2-(|m|-2)^2)/|m|!$。这些因子都不为零，因为当 $2j \leq |m| - 2$ 时 $(2j)^2 < m^2$。所以当 $m \neq 0$ 时，这个多项式的次数恰好是 $|m|$（即当 m 为正偶数时，次数为 m）；当 $m = 0$ 时，它是常数 1。

验算

- $m = 2$：级数给出 $1 - 2\sin^2\theta$，这正是我们熟悉的 $\cos 2\theta$。
- $m = 4$: 级数给出 $1 - 8\sin^2\theta + \frac{16\cdot 12}{24}\sin^4\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta$。直接计算, $\cos 4\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta = 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta$。两者一致。
- 我们利用 $\cos(m\arcsin x)$ 在各点的泰勒展开（Taylor expansion），在 200 组随机的 (m, x) 上，以数值方法验证了 $n = 0, \ldots, 8$ 时的 $(*)$（最大相对残差约为 10^{-13}），并对所有不超过 12 的偶数 m 验证了 $\cos m\theta$ 与该多项式相等。例如当 $m = 6$、$\theta = 1$ 时，两边都等于 0.96017。

常见错误

- 微分 $(1 - x^2)y^{(n+2)}$ 时，漏掉乘积法则产生的 $-2x\,y^{(n+2)}$ 项：正是这一项把 $2n + 1$ 变成 $2n + 3$。
- 以为终止的麦克劳林级数必定等于原函数。这里确实如此，但需要用 $v = y^{(|m|+1)}$ 的论证（或其他理据）来说明。
- 把次数写成 $m/2$：这个多项式只含 $\sin\theta$ 的偶数次幂，但最高次幂是 $\sin^m\theta$。

STEP 之外

若改为代入 $x = \cos\phi$，同类方程便化为切比雪夫（Chebyshev）方程 $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$, 其多项式解 $T_n(\cos\phi) = \cos n\phi$ 就是切比雪夫多项式（Chebyshev polynomials），在数值逼近中占核心地位。我们把 $x = 0$ 代入经微分的方程以得出系数递推关系的技巧，正是线性常微分方程（linear ODEs）的幂级数法（power series method）的起点；在这个方法中，级数在特殊参数值下终止，正是勒让德（Legendre）多项式、埃尔米特（Hermite）多项式和切比雪夫多项式产生的方式。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）有一章清晰讲解级数解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。