详细解答

STEP III 2010，第 6 题

纯数学 · 三维空间中的旋转

STEP III 2010，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s3-q6

关键思路

绕一条轴的旋转（rotation）会令轴上每一点保持不动，而对垂直于该轴的平面内的一切，则完全如同该平面上的一个旋转般转动。因此每一步都可化为一个二维旋转：找出被转动的平面，写下该平面内一对标准正交（orthonormal）向量，然后把它们旋转。任何沿轴方向的向量都只会原封不动，而单是这一点观察，便已替 Q 的计算完成了大部分工作。

解答

以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 表示沿各坐标轴的单位向量（unit vectors），于是 P_0、Q_0、R_0 的位置向量（position vectors）分别为 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$。

第 (i) 部分

绕 z 轴旋转会把 x-y 平面转过 ϕ，而 $\mathbf{i}$ 朝 $\mathbf{j}$ 的方向移动。因此

$$P_1 = (\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0).$$

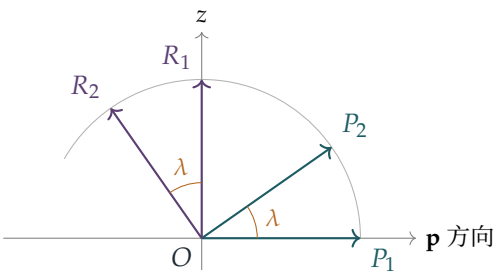
为了稍后之用：同一个旋转把 $\mathbf{j}$ 送到 $Q_1 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$，因为在该平面内 Q 始终领先 P 一个直角；而 R_0 位于轴上，故保持不动：$R_1 = (0,0,1)$。

第 (ii) 部分

设 $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP_1} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$。在 x-y 平面内垂直于 OP_1 的直线，其方向为

$$\mathbf{u} = (-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0),$$

因为 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}=0$ 及 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}=0$。垂直于这条轴的平面，就是由标准正交向量对 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{k}$ 所张成的平面，而第二次旋转把这个平面转过 λ，其中 $\mathbf{p}$ 朝 $\mathbf{k}$ 的方向移动：



在该平面内，这个旋转把

$$\mathbf{p}\mapsto\cos\lambda\,\mathbf{p}+\sin\lambda\,\mathbf{k},\qquad \mathbf{k}\mapsto-\sin\lambda\,\mathbf{p}+\cos\lambda\,\mathbf{k},$$

其中第二式成立，是因为 $\mathbf{k}$ 始终领先 $\mathbf{p}$ 一个直角。因此

$$P_2=(\cos\lambda\cos\phi,\ \cos\lambda\sin\phi,\ \sin\lambda),\qquad R_2=(-\sin\lambda\cos\phi,\ -\sin\lambda\sin\phi,\ \cos\lambda).$$

想一想 在第二次旋转中，Q 会去到哪里?

第一次旋转后，Q 位于 $Q_1=(-\sin\phi,\cos\phi,0)$，这恰好就是 $\mathbf{u}$：它正正位于第二次旋转的轴上，所以不会移动。因此

$$Q_2=(-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0).$$

作为验算，P_2、Q_2、R_2 是两两互相垂直的单位向量（例如 $\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OR_2}=-\sin\lambda\cos\lambda\cos^2\phi-\sin\lambda\cos\lambda\sin^2\phi+\sin\lambda\cos\lambda=0$），经过旋转后理应如此。

第 (iii) 部分

在这一部分中，我们一直假设 $P_2\neq\pm P_0$，使 O、P_0、P_2 确实能决定一个平面。

想一想 为甚么旋转角会等于角 P_2OP_0?

由于 P 一直留在平面 OP_0P_2 内，旋转轴必定是经过 O 并垂直于该平面的直线（旋转会令一点在经过该点而垂直于轴的平面内移动）。所以 P 沿着这个平面上的大圆（great circle）移动，而平面内每个向量都转过旋转角。因此该角就是 $\overrightarrow{OP_2}$ 与 $\overrightarrow{OP_0}$ 之间的夹角；又由于两者皆为单位向量，

$$\cos\theta=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_0}=(\cos\lambda\cos\phi)(1)+(\cos\lambda\sin\phi)(0)+(\sin\lambda)(0)=\cos\phi\cos\lambda,$$

此即所求。（若绕远路转过 $2\pi-\theta$，所得的余弦值亦相同。）

旋转轴同时垂直于 $\overrightarrow{OP_2}$ 和 $\overrightarrow{OP_0}$，所以它沿着两者的向量积（cross product）方向：

$$\overrightarrow{OP_2} \times \overrightarrow{OP_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\lambda\cos\phi & \cos\lambda\sin\phi & \sin\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ \sin\lambda,\ -\cos\lambda\sin\phi).$$

所以沿轴方向的一个向量为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\lambda \\ -\cos\lambda\sin\phi \end{pmatrix}.$$

取这个定向时，按右手定则（right-hand rule）转过 θ 的旋转会把 P_2 带到 P_0。留意这条轴没有 x 分量，这是理所当然的，因为它垂直于 OP_0。

验算

- 若 $\lambda = 0$，第二次旋转毫无作用，所以第三次旋转只是抵消第一次：$\theta = \phi$，而轴沿 $(0, 0, -\sin\phi)$ 方向，即 z 轴。公式与此吻合。
- 若 $\phi = 0$，唯一的旋转是绕 y 轴进行的；而轴确实沿 $(0, \sin\lambda, 0)$ 方向，且 $\theta = \lambda$。
- 以数值验证：对 20 000 组随机的 (ϕ, λ)，用 Rodrigues 公式（Rodrigues' formula）施行各旋转，均能重现 P_2、Q_2、R_2，而绕 $(0, \sin\lambda, -\cos\lambda\sin\phi)$ 转过 θ 的旋转亦会把 P_2 送回 P_0。当 $\phi = 0.7$、$\lambda = 0.4$ 时，$\cos\theta \approx 0.7045$，故 $\theta \approx 0.789$。

常见错误

- 在第二步中旋转了 Q：它位于轴上，所以应保持不动。
- 弄错 R_2 的正负号：当 P 向上朝 $\mathbf{k}$ 倾斜时，R 会向下倾并远离 OP_1，所以它的水平部分是 $-\sin\lambda\,\mathbf{p}$。

STEP 之外

这里的两个角分别是经度（longitude）ϕ 和纬度（latitude）λ，而 $\cos\theta = \cos\phi\cos\lambda$ 正是球面余弦定理（spherical cosine rule）的直角情形，在航海中用来计算大圆距离。更一般地说，两个旋转的合成（composition）仍然是绕单一条轴的旋转（欧拉（Euler）旋转定理），而以 $\overrightarrow{OP_2}$、$\overrightarrow{OQ_2}$、$\overrightarrow{OR_2}$ 为各列所组成的，正是合成旋转的正交矩阵（orthogonal matrix）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）讨论了旋转矩阵和正交矩阵；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）则展示了如何用复数（complex numbers）描述球面的旋转。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。