详细解答

STEP III 2010，第 5 题

纯数学 · 坐标几何作图

STEP III 2010，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s3-q5

关键思路

这题全靠坐标完成：先求出 R 和 S，用截距式（intercept form）写出直线 PQ 和 RS，再看两者各自与“过 A 且垂直（perpendicular）于 AC 的直线”交于何处。它们交于同一点，而该点必然就是 T。至于作图，关键在于一个观察：已知正方形的对角线（diagonal）正好是我们需要的边长，而第一部分正好提供了一个只用直尺（straight-edge）就能作出与该对角线成直角的方法。

解答

证明 $TA \perp AC$

过 $C(a,a)$ 的直线很容易处理。直线 CP 连接 (a,a) 与 $(an,0)$，所以其斜率（gradient）为 $\dfrac{a}{a-an} = \dfrac{1}{1-n}$（由于 $n<1$，斜率有定义），方程为

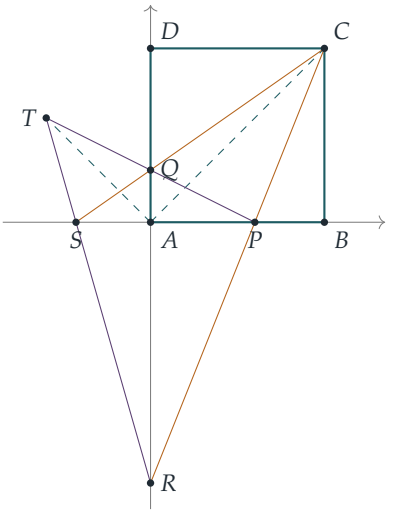
$$y = \frac{x-an}{1-n}.$$

直线 DA 是 $x=0$，所以

$$R = \left(0,\ -\frac{an}{1-n}\right).$$

同理，CQ 连接 (a,a) 与 $(0,am)$，斜率为 $1-m \neq 0$，方程为 $y = am + (1-m)x$。令 $y=0$（即直线 BA），

$$S = \left(-\frac{am}{1-m},\ 0\right).$$



现在用截距式。直线 PQ 的截距为 an 和 am；直线 RS 的截距为 $-\frac{am}{1-m}$ 和 $-\frac{an}{1-n}$。所以

$$\begin{aligned} PQ: &\quad \frac{x}{n}+\frac{y}{m}=a, \\ RS: &\quad -\frac{(1-m)x}{m}-\frac{(1-n)y}{n}=a. \end{aligned}$$

由于 AC 的斜率为 1，过 A 且垂直于 AC 的直线是 $y=-x$。把 $y=-x$ 代入两条方程：

$$\begin{aligned} PQ: &\quad x\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\Big)=a, \\ RS: &\quad x\Big(-\frac{1}{m}+1+\frac{1}{n}-1\Big)=x\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\Big)=a. \end{aligned}$$

两者是同一条方程。由于 $m\neq n$，括号内的值不为零，因此两条直线都与 $y=-x$ 交于唯一一点

$$\Big(\frac{amn}{m-n},-\frac{amn}{m-n}\Big).$$

想一想 我们找到了一个同时在 PQ 和 RS 上的点。为甚么它一定是 T?

两条不同的直线最多只有一个交点。直线 PQ 和 RS 是不同的直线（PQ 经过 x 轴上 $x>0$ 的点 P，而 RS 与 x 轴交于 $x<0$ 的点 S）。所以两者的任何公共点都就是它们的交点 T。因此

$$T=\Big(\frac{amn}{m-n},-\frac{amn}{m-n}\Big),$$

它位于 $y=-x$ 上。向量(vector) $\overrightarrow{AT}$ 是 $(1,-1)$ 的倍数，而 $\overrightarrow{AC}=(a,a)$，且 $(1,-1)\cdot(a,a)=0$。所以 TA 垂直于 AC，得证。

留意整个推导从未用到 $m<n$，只用到 $m\neq n$。推导也从未用到 P 和 Q 的实际位置，所以只要 $AP\neq AQ$，边 AB 上的任意一点 P 与边 AD 上的任意一点 Q 所得的 T，都会落在过 A 且垂直于 AC 的直线上。

作图

面积为 $2a^2$ 的正方形，边长为 $\sqrt{2}\,a$，正好是对角线 AC 的长度。所以我们以 AC 为一边作正方形。用坐标表示，这个正方形的顶点为

$$A(0,0),\quad E(a,-a),\quad F(2a,0),\quad C(a,a).$$

它的各边 $\overrightarrow{AE}=(a,-a)$、$\overrightarrow{EF}=(a,a)$、$\overrightarrow{FC}=(-a,a)$ 和 $\overrightarrow{CA}=(-a,-a)$ 长度都是 $\sqrt{2}\,a$，而且相邻两边互相垂直，所以其面积为 $2a^2$。

> **想一想** 用没有刻度的直尺，我们只能连接两点和延长直线。这样怎可能作出直角？

第一部分正是这样一个方法，因为其中每一步都只是连接两个已知点或求两直线的交点。只用直尺：

1. 画出对角线 AC。在 AB 上任取一点 P，在 AD 上任取一点 Q，使两者与 A 的距离明显不相等（无须量度；我们只需要 $AP\neq AQ$）。
2. 延长 CP 与直线 DA 交于 R，延长 CQ 与直线 BA 交于 S。延长 PQ 和 RS，交于 T。
3. 画出直线 TA。由上面的结果，它垂直于 AC。把 CB 延长越过 B，与直线 TA 交于 E。（直线 CB 是 $x=a$，直线 TA 是 $y=-x$，所以 $E=(a,-a)$。）
4. 在对角 C 重复第 1 至 3 步：在 CD 和 CB 上取与 C 距离明显不相等的点，进行同样的作图。绕正方形中心的半周旋转（half-turn）会互换 A 和 C，并把正方形映射到自身，所以这样得到的是过 C 且垂直于 AC 的直线，即 $x+y=2a$。
5. 把 AB 延长越过 B，与这条直线交于 $F=(2a,0)$。

于是 $AEFC$ 是边长为 $AC=\sqrt{2}\,a$ 的正方形，所以其面积为 $2a^2$。（它的对角线 AF 和 CE 分别位于直线 AB 和 CB 上，相交于新正方形的中心 B。）

验算

- 取 $a=1$、$m=0.3$、$n=0.6$。则 $R=(0,-1.5)$、$S=(-\frac{3}{7},0)$、$T=(-0.6,0.6)$。点 T 在通过 R 和 S 的直线上：$-\frac{0.7}{0.3}(-0.6)-\frac{0.4}{0.6}(0.6)=1.4-0.4=1$。它也在 PQ 上：$-1+2=1$。而且 T 在 $y=-x$ 上。
- 我们用电脑以分数精确计算了 R、S 和 T，对 a、m、n 作了 2000 组随机选择，$m<n$ 和 $m>n$ 两种次序都有涵盖。在每一种情况下，$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，而且所作出的 $AEFC$ 都有四条相等的边，边长平方为 $2a^2$，并且两两成直角相交。

常见错误

- 硬解 PQ 和 RS 的联立方程。这样做行得通，但很繁复。把一条候选直线（$y = -x$）分别代入两条方程检验，快得多。
- 忘记解释为甚么公共点真的是 T。你需要说明两条直线是不同的。
- 在作图中“作垂线”或“截取某长度”却没有说明怎样做。每一步都必须是连接两点或求两直线的交点。

STEP 之外

只用直尺的作图属于射影几何（*projective geometry*），在其中连接与相交是仅有的运算；而像隐藏在 R、S 和 T 之中的那些比例，则通过交比（cross-ratio）和调和点列（harmonic range）来研究。彭赛列（Poncelet）和施泰纳（Steiner）的一条经典定理指出：只要预先画好一个圆及其圆心，单凭直尺就能完成直尺与圆规所能做的一切作图；在本题中，正方形扮演了类似的角色。考克斯特（Coxeter）的 *Projective Geometry*（《射影几何》）是这个学科一本优美的入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。