详细解答

STEP III 2010，第 4 题

纯数学 • 多项式的公共根

> **STEP III 2010，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q4

关键思路

若 α 同时满足两条首项系数（leading coefficient）相同的二次方程（quadratic），那么它亦满足两者之差，而 x^2 项互相抵消，只剩下一条线性（linear）方程。这样便能确定 α，再把它代回其中一条二次方程，就得到所求条件。在第 (ii) 部分，只要先把三次多项式（cubic）除以二次多项式，同一技巧便再次奏效：在二次方程的根上，三次多项式的值与其余式（remainder）完全相同，于是问题又回到两条二次方程，可直接引用第 (i) 部分的结果。

解答

全文中，“根”指复数范围内的根，因此每条二次方程都有两个根（按重数（multiplicity）计算）。

第 (i) 部分

设 α 同时满足两条方程。以第一条减去第二条，得

$$(a-c)\alpha + (b-d) = 0.$$

由于 $a \neq c$，可除以 $a-c$，得

$$\alpha = -\frac{b-d}{a-c},$$

即为所求。

条件。记 $k = a - c \neq 0$ 及 $m = b - d$，则条件为 $m^2 - amk + bk^2 = 0$。

($\Rightarrow$)若存在公共根(common root),由第一个结果,它必为 $\alpha = -m/k$。代入 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$,

$$\frac{m^2}{k^2} - \frac{am}{k} + b = 0,$$

再乘以 $k^2 \neq 0$，得 $m^2 - amk + bk^2 = 0$。

($\Leftarrow$) 设 $m^2 - amk + bk^2 = 0$，并定义 $\alpha = -m/k$。把条件除以 k^2，再把上一步倒过来看，便知 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$。另外，按 α 的取法，$(a-c)\alpha + (b-d) = k\alpha + m = 0$。因此

$$\alpha^2 + c\alpha + d = (\alpha^2 + a\alpha + b) - ((a-c)\alpha + (b-d)) = 0 - 0 = 0,$$

所以 α 是公共根。这就证明了在 $a \neq c$ 时两者等价。

> ? **想一想** 为甚么单靠正方向并不足够?

正方向只说明如果存在公共根，条件便成立。要证明“当且仅当”(if and only if)，我们还必须证明条件能产生一个公共根。正因如此，我们才由条件定义 α，并验证它同时满足两条方程。

去掉 $a \neq c$。设 $a = c$。此时条件变为 $(b-d)^2 = 0$，即 $b = d$。

- 若 $b = d$，两条方程完全相同，自然有公共根（它们的两个根都是公共根），而条件亦成立。
- 若 $b \neq d$，假如有公共根 α，相减便得 $(a-c)\alpha + (b-d) = b - d = 0$，矛盾。所以没有公共根，而条件亦不成立。

两种情况下，“有公共根”与“条件成立”都一致，所以**是的，即使没有 $a \neq c$ 这个条件，结果仍然成立**。

(唯一微妙之处在于只考虑实根的情况。若 $a = c$、$b = d$ 且 $a^2 < 4b$，条件成立，但两条相同的方程却没有实根。当 $a \neq c$ 时则没有这个问题，因为对实系数而言，公共根 $-(b-d)/(a-c)$ 必然是实数。)

第 (ii) 部分

把三次多项式除以 $x^2 + ax + b$。由于 $(x+1)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b$,

$$x^3 + (a+1)x^2 + qx + r = (x+1)(x^2 + ax + b) + (q - a - b)x + (r - b).$$

因此若在 $x = \alpha$ 处 $x^2 + ax + b = 0$，则三次多项式在该处的值为 $(q-a-b)\alpha + (r-b)$，而二次多项式

$$(x^2 + ax + b) + (q - a - b)x + (r - b) = x^2 + (q-b)x + r.$$

在该处的值亦然。所以 α 是该二次方程与三次方程的公共根，当且仅当它是

$$x^2+ax+b=0 \qquad 与 \qquad x^2+(q-b)x+r=0.$$

的公共根。现在以 $c=q-b$ 及 $d=r$ 应用第 (i) 部分。此时 $a-c=a+b-q$ 及 $b-d=b-r$，所以存在公共根当且仅当

$$(b-r)^2-a(b-r)(a+b-q)+b(a+b-q)^2=0.$$

由于无论 $a=c$ 与否，第 (i) 部分的结果都成立，这里不需要额外条件。

例子。把两条方程都除以 2，使它们成为首一（monic）方程：

$$x^2+\tfrac{5}{2}x+b=0, \qquad x^3+\tfrac{7}{2}x^2+\tfrac{5}{2}x+\tfrac{1}{2}=0.$$

它们具备所需形式, 其中 $a=\frac{5}{2}$ (而且确实 $a+1=\frac{7}{2}$)、$q=\frac{5}{2}$ 及 $r=\frac{1}{2}$。于是 $a+b-q=b$ 及 $b-r=b-\frac{1}{2}$，条件变为

$$\left(b-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{5}{2}\left(b-\tfrac{1}{2}\right)b+b\cdot b^2=0.$$

乘以 4:

$$\begin{aligned}(2b-1)^2-5b(2b-1)+4b^3&=0\\ 4b^3-6b^2+b+1&=0.\end{aligned}$$

观察可知 $b=1$ 是一个根，而

$$4b^3-6b^2+b+1=(b-1)(4b^2-2b-1).$$

二次因式给出 $b=\dfrac{2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$。所以两条方程有公共根，当且仅当

$$b=1 \qquad 或 \qquad b=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad 或 \qquad b=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

另一方法。这里的三次方程不含 b, 所以可以直接解出。试 $x=-\frac{1}{2}$, 得 $-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}-\frac{5}{2}+1=0$, 所以

$$2x^3+7x^2+5x+1=(2x+1)(x^2+3x+1),$$

其根为 $-\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})$。公共根 x 必须满足 $2b=-(2x^2+5x)$。当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, 得 $b=1$。至于另外两个根, $x^2=-3x-1$, 所以 $2x^2+5x=-x-2$, 而 $b=\frac{1}{2}(x+2)=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{5})$。这与上面的答案一致。

验算

- 当 $b = 1$ 时，二次式 $2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2)$ 有根 $-\frac{1}{2}$，而它是三次方程的根。
- $b = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \approx 0.8090$：二次方程的根为 ≈ -0.3820 及 -2.1180，而 $-0.3820 \approx \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5})$ 是三次方程的根。
- 以电脑测试 20 000 组随机整数 a, b, c, d（以及 a, b, q, r），结果显示条件式恰好在两条方程有公共复数根时为零，包括 $a = c$ 的情况。

常见错误

- 只证明“有公共根 $\Rightarrow$ 条件成立”，忘记证明逆命题（converse）。
- 回答 $a = c$ 的问题时说“不成立，因为我们除以了 $a - c$”。证明的确失效，但结果仍然成立，因为两边都化为 $b = d$。
- 未先除以 2 便应用第 (ii) 部分：公式要求方程是首一的。

STEP 之外

第 (i) 部分的表达式是两条二次多项式的结式（resultant）：一个以系数为变量的多项式，恰好在两个多项式有公共根时为零。结式源于西尔维斯特（Sylvester）行列式，并且是用来求解多项式方程组的消元理论（elimination theory）的基础。第 (ii) 部分中“相除并保留余式”的步骤，正是多项式的欧几里得算法（Euclidean algorithm）的第一步；这个算法求两个多项式的最高公因式（highest common factor），方法与整数的情况如出一辙。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）在这个框架下探讨多项式除法与最高公因式。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。