详细解答

STEP III 2010，第 2 题

纯数学 · 定积分

STEP III 2010，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s3-q2

关键思路

这里每个分母都是一个二次式（quadratic）（以 x 或 x^2 为变量），而其根原来正是 $\pm e^{a}$ 和 $\pm e^{-a}$。把双曲函数（hyperbolic function）系数写成指数形式，因式分解（factorisation）便一目了然，因为 e^{a} 与 e^{-a} 之积为 1，之和为 $2\cosh a$（或之差为 $2\sinh a$）。之后，部分分式（partial fractions）把一切化为对数或反正切（arctangent），而真正的功夫在于把答案整理成双曲函数的形式。

解答

第 (i) 部分

按定义，

$$\cosh a = \tfrac{1}{2}\left(e^{a} + e^{-a}\right).$$

因此 $2\cosh a = e^{a} + e^{-a}$ 且 $e^{a}\cdot e^{-a} = 1$，即

$$x^2 + 2x\cosh a + 1 = (x + e^{a})(x + e^{-a}).$$

当 $x \geq 0$ 时两个因式皆为正，所以被积函数（integrand）在 $[0,1]$ 上连续。由于 $a > 0$，两根 $-e^{a}$ 与 $-e^{-a}$ 相异，部分分式为

$$\frac{1}{(x+e^{-a})(x+e^{a})} = \frac{1}{e^{a}-e^{-a}}\left(\frac{1}{x+e^{-a}} - \frac{1}{x+e^{a}}\right) = \frac{1}{2\sinh a}\left(\frac{1}{x+e^{-a}} - \frac{1}{x+e^{a}}\right),$$

你可以把它重新合并来验证：分子变成 $(x+e^a)-(x+e^{-a})=e^a-e^{-a}$。积分得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cosh a+1} &= \frac{1}{2\sinh a}\Big[\ln\frac{x+e^{-a}}{x+e^a}\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{2\sinh a}\left(\ln\frac{1+e^{-a}}{1+e^a}-\ln\frac{e^{-a}}{e^a}\right).\end{aligned}$$

第一个对数可以漂亮地化简：$1+e^a=e^a(e^{-a}+1)$，所以 $\dfrac{1+e^{-a}}{1+e^a}=e^{-a}$。第二个是 $\ln e^{-2a}=-2a$。因此

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cosh a+1}=\frac{1}{2\sinh a}(-a+2a)=\frac{a}{2\sinh a},$$

这正是所求的结果。

第 (ii) 部分

第一个积分。 现在系数是 $2\sinh a=e^a-e^{-a}$，常数项是 $-1=e^a\cdot(-e^{-a})$，所以

$$x^2+2x\sinh a-1=(x+e^a)(x-e^{-a}).$$

> **想一想** 被积函数在整个范围 $[1,\infty)$ 上都表现良好吗?

两根为 $-e^a<0$ 和 e^{-a}，而由于 $a>0$，有 $e^{-a}<1$。所以当 $x\geq 1$ 时两个因式皆为正，被积函数连续。当 x 很大时，它的表现类似 $1/x^2$，所以这个瑕积分（improper integral）收敛（converges）。部分分式的做法同前，现在用 $e^a-(-e^{-a})=2\cosh a$：

$$\frac{1}{(x-e^{-a})(x+e^a)}=\frac{1}{2\cosh a}\left(\frac{1}{x-e^{-a}}-\frac{1}{x+e^a}\right).$$

由 1 积分至 X，再令 $X\to\infty$，

$$\int_1^X \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\sinh a-1}=\frac{1}{2\cosh a}\left(\ln\frac{X-e^{-a}}{X+e^a}-\ln\frac{1-e^{-a}}{1+e^a}\right).$$

当 $X\to\infty$ 时，分数 $\frac{X-e^{-a}}{X+e^a}\to 1$，所以第一个对数趋向 0。至于第二个，从分子抽出 e^{-a}：

$$\frac{1-e^{-a}}{1+e^a}=e^{-a}\,\frac{e^a-1}{e^a+1}=e^{-a}\tanh\tfrac{a}{2},$$

这里用了 $\dfrac{e^a-1}{e^a+1}=\dfrac{e^{a/2}-e^{-a/2}}{e^{a/2}+e^{-a/2}}=\tanh\frac{a}{2}$（分子分母同除以 $e^{a/2}$）。所以第二个对数是 $-a+\ln\tanh\frac{a}{2}$，而

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\sinh a-1}=\frac{a-\ln\tanh\frac{a}{2}}{2\cosh a}=\frac{a+\ln\coth\frac{a}{2}}{2\cosh a}.$$

分子中两项皆为正（因为 $0<\tanh\frac{a}{2}<1$），这正符合被积函数为正的要求。

第二个积分。 这是第 (i) 部分的二次式，只是把 x 换成 x^2：

$$x^4 + 2x^2\cosh a + 1 = (x^2 + e^a)(x^2 + e^{-a}),$$

对所有实数 x，两个因式皆为正，所以被积函数连续；而它在无穷远处是 $O(1/x^4)$，所以积分收敛。把 x^2 当作变量，套用同样的部分分式，

$$\frac{1}{(x^2+e^{-a})(x^2+e^a)} = \frac{1}{2\sinh a}\left(\frac{1}{x^2+e^{-a}} - \frac{1}{x^2+e^a}\right).$$

每一部分都是标准的反正切积分：对 $c > 0$，

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+c^2} = \left[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2c}.$$

分别取 $c = e^{-a/2}$ 和 $c = e^{a/2}$（每一部分各自收敛，所以可以把积分拆开），

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+2x^2\cosh a+1} = \frac{1}{2\sinh a}\cdot\frac{\pi}{2}\left(e^{a/2} - e^{-a/2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\sinh\frac{a}{2}}{2\sinh a}.$$

最后，二倍角公式（double-angle formula）$\sinh a = 2\sinh\frac{a}{2}\cosh\frac{a}{2}$ 把 $\sinh\frac{a}{2}$ 约去：

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+2x^2\cosh a+1} = \frac{\pi}{4\cosh\frac{a}{2}}.$$

想一想 有没有办法预先看出 $\cosh\frac{a}{2}$ 会出现?

有。设该积分为 I。代换（substitution）$x \mapsto 1/x$ 显示同样有 $I = \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+2x^2\cosh a+1}\,\mathrm{d}x$，所以

$$2I = \int_0^\infty \frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2+2\cosh a}\,\mathrm{d}x.$$

令 $u = x - 1/x$，则 $\mathrm{d}u = (1+1/x^2)\,\mathrm{d}x$ 且 $x^2+1/x^2 = u^2+2$，而 u 由 $-\infty$ 走到 ∞。分母变成 $u^2+2+2\cosh a = u^2+4\cosh^2\frac{a}{2}$，所以 $2I = \pi/(2\cosh\frac{a}{2})$，答案相同。

验算

- 当 $a \to 0$ 时，第 (i) 部分变成 $\int_0^1 (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$，而 $a/(2\sinh a) \to \frac{1}{2}$。最后一个积分变成 $\int_0^\infty (1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$，与 $\pi/(4\cosh 0)$ 吻合。
- 数值上，取 $a = 1$，辛普森法则（Simpson's rule）给出第 (i) 部分为 0.4254590641，(ii) 的第一个积分为 0.5741556186，第二个为 0.6965059227，与 $\frac{1}{2\sinh 1}$、$\frac{1-\ln\tanh\frac{1}{2}}{2\cosh 1}$ 及 $\frac{\pi}{4\cosh\frac{1}{2}}$ 在小数点后十位一致。

常见错误

- 把部分分式的常数弄错：它是 $1/(\text{两根之差})$，在第 (i) 部分是 $1/(2\sinh a)$，但在 (ii) 的第一个积分中是 $1/(2\cosh a)$。
- 忘记验证 $e^{-a} < 1$，即分母的根位于 $[1, \infty)$ 以外。
- 把答案留在指数形式：题目要求用双曲函数表示，所以 $\frac{e^a-1}{e^a+1}$ 应写成 $\tanh\frac{a}{2}$。

STEP 之外

在大学里，(ii) 的第二个积分通常用围道积分（contour integration）来做：被积函数在 $\pm ie^{\pm a/2}$ 处有单极点（simple poles），把上半平面（upper half-plane）内的留数（residues）加起来，几行便得出 $\pi/(4\cosh\frac{a}{2})$。同一方法也能处理 $\int_0^\infty \mathrm{d}x/(1+x^n)$，以及许多用实分析方法难以攻克的积分。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）从几何角度阐述留数及其背后的道理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。