详细解答

STEP III 2010，第 12 题

概率与统计 • 几何分布的期望值

STEP III 2010，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s3-q12

关键思路

级数 S 是一个算术几何级数（arithmetico-geometric series），而减去 rS 这个技巧可以把它化成普通的几何级数（geometric series）。求出 S 之后，题中每一个期望值（expectation）都正好是这种形式的和：射击次数按线性增长，而射到那一步的概率则按几何方式递减。所以整道题归结为把每个期望值写成一个和，再读出 r 和 d 的正确数值。

解答

级数

由于 $|r| < 1$，级数绝对收敛（converges absolutely）（其各项的绝对值不超过某常数乘以 $n|r|^n$），所以可以逐项相减。把 r 的同次幂对齐，

$$\begin{aligned} S &= 1 + (1+d)r + (1+2d)r^2 + (1+3d)r^3 + \cdots, \\ rS &= \quad\quad r + (1+d)r^2 + (1+2d)r^3 + \cdots, \end{aligned}$$

对于 $n \geq 1$，r^n 的系数之差都正好是 d。因此

$$(1-r)S = 1 + d\left(r + r^2 + r^3 + \cdots\right) = 1 + \frac{rd}{1-r},$$

这里把几何级数求和，因为 $|r| < 1$，所以这一步成立。两边除以 $1 - r \neq 0$，

$$S = \frac{1}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2},$$

即为所求。

Arthur 单独射击

假设 $0 < a \leq 1$（若 $a = 0$，Arthur 永远射不中）。设 N 为 Arthur 所需的射击次数。$N = n$ 当且仅当他首 $n-1$ 次都射不中，而第 n 次射中，所以由独立性（independence）得

$$\mathrm{P}(N = n) = a'^{n-1}a, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

因此

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a\, a'^{n-1} = a(1 + 2a' + 3a'^2 + \cdots).$$

括号内正是 $r = a'$、$d = 1$ 时的 S（a'^n 的系数是 $1 + n$），而且 $0 \leq a' < 1$，所以

$$\mathrm{E}(N) = a\left(\frac{1}{1-a'} + \frac{a'}{(1-a')^2}\right) = a\left(\frac{1}{a} + \frac{a'}{a^2}\right) = \frac{a + a'}{a} = \frac{1}{a},$$

这里先用了 $1 - a' = a$，再用了 $a + a' = 1$。（当 $a = 1$ 时，这条公式同样给出 1。）

比赛：谁会胜出

以下取 $0 < a < 1$ 及 $0 < b < 1$，使得 $0 < a'b' < 1$。第 $1, 3, 5, \ldots$ 次射击属于 Arthur，第 $2, 4, 6, \ldots$ 次射击属于 Boadicea。把 Arthur 射一次、接着 Boadicea 射一次称为一个回合；一个回合中无人射中的概率是 $a'b'$。

Arthur 在第 $2k+1$ 次射击时胜出（$k = 0, 1, 2, \ldots$），当且仅当首 k 个回合都无人射中，然后 Arthur 射中。由独立性，这事件的概率是 $(a'b')^k a$，而这些事件互斥（disjoint），所以

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (a'b')^k a = \frac{a}{1 - a'b'}.$$

同理，Boadicea 在第 $2k+2$ 次射击时胜出，当且仅当 k 个回合都无人射中，然后 Arthur 射不中而 Boadicea 射中，其概率是 $(a'b')^k a'b$。所以

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} (a'b')^k a'b = \frac{a'b}{1 - a'b'} = \frac{(1-a)b}{1 - (1-a)(1-b)}.$$

验证一下：$1 - a'b' = a + b - ab = a + a'b$，所以 $\alpha + \beta = 1$，即比赛以概率 1 结束。

比赛：期望长度

设 T 为比赛中的射击次数。由上一部分，$T = 2k+1$ 的概率是 $(a'b')^k a$，而 $T = 2k+2$ 的概率是 $(a'b')^k a'b$。记 $q = a'b'$，

$$\mathrm{E}(T) = a \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) q^k + a'b \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) q^k.$$

想一想 这两个和怎样套进级数 S 的形式?

第一个和是 $1+3q+5q^2+\cdots$，即 $r=q$、$d=2$ 时的 S。第二个和是 $1+2q+3q^2+\cdots$ 的两倍，而后者是 $r=q$、$d=1$ 时的 S。所以

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q^k=\frac{1}{1-q}+\frac{2q}{(1-q)^2}=\frac{1+q}{(1-q)^2},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)q^k=2\left(\frac{1}{1-q}+\frac{q}{(1-q)^2}\right)=\frac{2}{(1-q)^2}.$$

因此

$$\mathrm{E}(T)=\frac{a(1+q)+2a'b}{(1-q)^2}.$$

现在与目标式比较。利用 $\alpha=a/(1-q)$ 及 $\beta=a'b/(1-q)$，

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=\frac{1}{1-q}+\frac{a'}{1-q}=\frac{(1+a')(1-q)}{(1-q)^2}.$$

所以只需证明 $a(1+q)+2a'b=(1+a')(1-q)$。利用 $1-q=a+a'b$，

$$(1+a')(1-q)=(1+a')(a+a'b)=a+aa'+a'b+a'^2b,$$
$$a(1+q)+2a'b=a+aa'(1-b)+2a'b=a+aa'-aa'b+2a'b.$$

两者之差（第一式减第二式）是

$$a'^2b+a'b-2a'b+aa'b=a'b\,(a'+a-1)=0,$$

因为 $a+a'=1$。因此

$$\mathrm{E}(T)=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b},$$

即为所求。

验算

- 若 $a=1$，Arthur 第一次便射中：$\alpha=1$，$\beta=0$，$\mathrm{E}(T)=1$，与 $\alpha/a+\beta/b$ 吻合。
- 若 $a=b=p$，则 $\alpha/p+\beta/p=(\alpha+\beta)/p=1/p$。这是对的：此时比赛只是一连串独立的射击，每次射中的概率都是 p，而由第一部分，首次射中平均需要 $1/p$ 次射击。
- 取 $a=0.3$、$b=0.45$，得 $\alpha=0.3/0.615\approx0.4878$ 及 $\mathrm{E}(T)=1.7/0.615\approx2.764$；模拟（simulation）200 000 场比赛得出 0.486 和 2.769。

常见错误

- 忘记 Boadicea 只有在 Arthur 刚刚射不中时才可能胜出，于是写成 $\beta = b/(1 - a'b')$；漏掉的因子 a' 会令 $\alpha + \beta \neq 1$，从而暴露出来。
- 数回合而不是数射击次数：Boadicea 在第 $k+1$ 回合胜出的比赛共有 $2k+2$ 次射击，而不是 $k+1$ 次。

STEP 之外

这类结果通常可以通过以第一回合为条件（“首步分析”（first-step analysis））更简洁地证明：若第一回合无人射中，比赛在两次射击后便重新开始，所以 $\mathrm{E}(T) = a \cdot 1 + a'b' \cdot 2 + a'b'\big(2 + \mathrm{E}(T)\big)$，一行便得出 $\mathrm{E}(T) = (1 + a')/(1 - a'b')$。首步分析是研究马尔可夫链（Markov chains）的基本工具，通常在数学学位的第一或第二年学习。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）涵盖了生成函数（generating functions）和这类论证方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。