详细解答

STEP III 2010，第 11 题

力学 · 摩擦力与相对运动

STEP III 2010，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

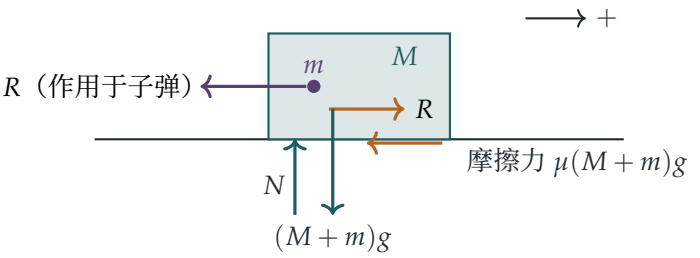
step.maths.org/questions/10-s3-q11

关键思路

这里动量并不守恒（conservation of momentum），因为地面的摩擦力自始至终都作用在木块上，所以熟悉的“子弹嵌入木块”捷径行不通。我们改为把子弹和木块视为两个独立的质点，各自有恒定的加速度，并由大小相等、方向相反的阻力 R 联系起来。既然加速度恒定，*suvat* 方程便能完成所有工作，而相对运动只不过是两者之差。

解答

我们把子弹和木块模拟为沿水平直线运动的质点，并以子弹的运动方向为正方向。当子弹在木块内时，木块以力 R 向后推子弹；根据牛顿第三定律（Newton's third law），子弹亦以力 R 向前推木块。



法向反作用力（*normal reaction*）。铅垂方向上没有任何物体加速。子弹由木块承托，所以地面承受两者的重量：$N = (M + m)g$。

摩擦力（*friction*）。由于题目给出 $R > (M + m)\mu g$，作用在木块上的向前力 R 超过可提供的最大摩擦力 $\mu N = (M + m)\mu g$。因此木块确实会滑动，而一旦木块移动，摩擦力便

取其极限值（limiting value）$\mu(M+m)g$，方向向后。

第 (i) 部分

子弹所受的唯一水平力是向后的 R，所以子弹以 R/m 减速。木块所受的向前合力为 $R-(M+m)\mu g$，所以它向前加速，加速度为

$$A=\frac{R-(M+m)\mu g}{M}>0.$$

相对于木块，子弹的加速度为 $-\frac{R}{m}-A$，所以它相对于木块的减速度（deceleration）大小为

$$a=\frac{R}{m}+\frac{R-(M+m)\mu g}{M},$$

此即所求。

第 (ii) 部分

相对于木块，子弹以速率 u 开始运动，并以 a 均匀减速，所以它在以下时间后相对于木块静止：

$$t_1=\frac{u}{a}.$$

在那一刻，木块的速率就是共同速率 v。木块由静止开始以恒定加速度 A 运动，所以

$$v=At_1=\frac{Au}{a},\qquad \text{即}\qquad av=Au=\frac{Ru-(M+m)\mu gu}{M},$$

这就是所要求的结果。

想一想 为甚么不直接用动量守恒求 v?

子弹—木块系统的动量只有在没有外加水平力作用时才守恒。这里地面的摩擦力在整段时间 t_1 内都作用在木块上，并带走动量 $(M+m)\mu g\,t_1$。（对于真实的子弹，这段时间极短，所以 $v\approx mu/(M+m)$，但题目要求的是准确值。）

第 (iii) 部分

在时间 t_1 内，木块由静止均匀加速至速率 v，所以它移动的距离等于平均速率乘以时间：

$$s_1=\frac{0+v}{2}t_1=\frac{uv}{2a}.$$

第 (iv) 部分

当子弹不再穿过木块时，两者便作为一个质量为 $M+m$ 的单一物体一起运动。其重量仍为 $(M+m)g$，所以摩擦力为向后的 $\mu(M+m)g$，减速度为 μg。由速率 v 开始，它再滑行

$$s_2=\frac{v^2}{2\mu g}$$

才停下（之后保持静止，因为已没有水平力去克服静摩擦力（static friction））。总距离为

$$s_1 + s_2 = \frac{uv}{2a} + \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{uv}{2a} + \frac{v}{2\mu g} \cdot \frac{Au}{a} = \frac{uv}{2a\mu g}(\mu g + A),$$

其中我们对其中一个因子 v 使用了第 (ii) 部分的 $v = Au/a$。

想一想 怎样消去 a 和 A，得出简洁的答案?

把两者都化成以 mM 为分母，并寻找公因子：

$$\mu g + A = \frac{M\mu g + R - (M+m)\mu g}{M} = \frac{R - m\mu g}{M},$$
$$a = \frac{MR + mR - m(M+m)\mu g}{mM} = \frac{(M+m)(R - m\mu g)}{mM}.$$

所以 $\dfrac{\mu g + A}{a} = \dfrac{m}{M+m}$，其中因子 $R - m\mu g$ 被约去（它是正数，因为 $R > (M+m)\mu g > m\mu g$）。因此木块移动的总距离为

$$\frac{uv}{2\mu g} \cdot \frac{m}{M+m} = \frac{muv}{2(M+m)\mu g},$$

此即所求。

$R < (M+m)\mu g$ 的情况

此时作用在木块上的向前推力 R 小于极限摩擦力 $(M+m)\mu g$，所以静摩擦力足以使木块保持不动：木块始终不会移动。子弹只是在静止的木块内以 R/m 减速，在穿入距离 $\dfrac{mu^2}{2R}$ 后停下（假设木块足够厚），而木块自始至终都留在原位。

验算

- 取 $m = 0.02\,\mathrm{kg}$、$M = 2\,\mathrm{kg}$、$u = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$\mu = 0.5$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 及 $R = 1000\,\mathrm{N}$。则 $a \approx 50\,495\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，$v \approx 2.941\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，$s_1 \approx 0.0087\,\mathrm{m}$，$s_2 \approx 0.8827\,\mathrm{m}$，以及 $s_1 + s_2 \approx 0.8914\,\mathrm{m}$，与 $muv/\big(2(M+m)\mu g\big)$ 相符。对两个质点作逐步数值模拟，亦得出相同的 v 和总距离。
- 当 $R \to \infty$（即瞬间碰撞）时，$v = Au/a \to mu/(M+m)$，正是动量守恒给出的答案，理应如此。
- 量纲（dimensions）：$muv/\big((M+m)\mu g\big)$ 的量纲是 (速率)^2/(加速度)，即长度。

常见错误

- 对木块使用 $N = Mg$，忘记嵌入其中的子弹的重量同样由地面承受。

- 在撞击过程中使用动量守恒，忽略了摩擦力的冲量。
- 把 R 当作木块所受的合力，而不是 R 减去摩擦力。

STEP 之外

冲量（impulse）可以为整个运动提供一个快速的一致性检验：由于系统最终静止，在木块移动的整段时间内，地面摩擦力的冲量必须等于子弹的初始动量 mu。把系统分拆成几部分，用牛顿第三定律追踪内力，并仔细处理外力，是大学一年级力学的核心技巧，并会引伸至质心参考系（centre-of-mass frame）和非弹性碰撞（inelastic collisions）。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）发展了这些概念，书中有很多正是这类风格的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。