详细解答

STEP III 2010，第 10 题

力学 · 微小振动

STEP III 2010，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s3-q10

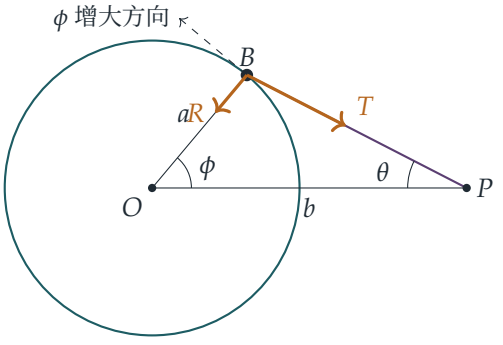
关键思路

珠子（bead）被限制在圆环上运动，所以只有沿圆环切线（tangent）方向的力分量会改变它的运动；法向反作用力（normal reaction）以及重力（由圆环的竖直反作用力抵消）完全不会出现在方程中。其余一切都是三角形 OBP 的几何。正弦定理（sine rule）把这几何关系转化为弦的长度；在角度很小时，它又给出第二部分所要求的 θ 与 ϕ 之间的线性关系。

解答

运动方程

把珠子视为光滑圆环上的质点，把弦视为轻而有弹性的弦。取 P 在正 x 轴上，并以逆时针方向量度 ϕ，使 B 位于与 OP 成角 ϕ 的位置，如图所示。在三角形 OBP 中，O 处的角为 ϕ，P 处的角为 θ，因此 B 处的角为 $\pi - \theta - \phi$。



设 $l = BP$。在三角形 OBP 中应用正弦定理，

$$\frac{l}{\sin\phi} = \frac{a}{\sin\theta} = \frac{b}{\sin(\theta+\phi)},$$

这里用了 $\sin(\pi-\theta-\phi) = \sin(\theta+\phi)$。特别地，$l = \dfrac{a\sin\phi}{\sin\theta}$。

弦在整个运动过程中都是拉紧的，因为 B 与 P 的最短距离是 $b-a$，而 $b-a > c$。所以由胡克定律（Hooke's law），张力（tension）为

$$T = \frac{\lambda(l-c)}{c} = \lambda\left(\frac{a\sin\phi}{c\sin\theta} - 1\right).$$

在水平面内的力有沿 BP 的张力 T，以及光滑圆环沿半径 OB 方向的法向反作用力 R。（在竖直方向，重量由反作用力的竖直部分抵消。）珠子在半径为 a 的圆上运动，所以它沿切线方向（取 ϕ 增大的方向）的加速度为 $a\ddot{\phi}$。只有 T 有切向分量。

弦 BP 与向内的半径 BO 成角 $\pi-\theta-\phi$，所以它与向外的半径成角 $\theta+\phi$，其沿切线的分量大小为 $T\sin(\theta+\phi)$。这个分量指向 P，即 ϕ 减小的方向。沿切线分解，

$$ma\ddot{\phi} = -\lambda\left(\frac{a\sin\phi}{c\sin\theta} - 1\right)\sin(\theta+\phi),$$

即为所求。（当 $\phi < 0$ 时，图形关于 OP 作反射；此时 $\theta < 0$ 亦成立，而以有向角计算，同一方程仍然成立。）

微小振动

正弦定理给出精确关系 $a\sin(\theta+\phi) = b\sin\theta$。当 θ 和 ϕ 都很小时，两边都有 $\sin x \approx x$，所以

$$a(\theta+\phi) \approx b\theta.$$

因此 $\theta \approx \dfrac{a\phi}{b-a}$，以及 $\theta+\phi \approx \dfrac{b\theta}{a} \approx \dfrac{b\phi}{b-a}$。

? **想一想** 当两个角都趋于零时，$\dfrac{a\sin\phi}{c\sin\theta}$ 会怎样？它看起来像 $0/0$。

这个商其实就是 l/c，而当 B 趋近平衡位置（equilibrium）时，长度 l 趋于 $b-a$。等价地，由上面的关系可得 $\dfrac{a\sin\phi}{\sin\theta} \approx \dfrac{a\phi}{\theta} \approx b-a$。所以在首阶近似（leading order）下，张力就是常数的平衡张力

$$T_0 = \lambda\left(\frac{b-a}{c} - 1\right) = \frac{\lambda(b-a-c)}{c},$$

由于 $c < b-a$，它是正数。因子 $\sin(\theta+\phi)$ 本身已经很小，所以 T 的任何修正项只会在二阶才有贡献。

代入运动方程并保留一阶项，

$$ma\ddot{\phi} \approx -\frac{\lambda(b-a-c)}{c}\cdot\frac{b\phi}{b-a}, \qquad \text{所以} \qquad \ddot{\phi} = -\omega^2\phi, \quad \omega^2 = \frac{\lambda b(b-a-c)}{mac(b-a)}.$$

这是简谐运动（simple harmonic motion），而在 $\theta = \phi = 0$ 附近微小振动的周期（period）为

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mac(b-a)}{\lambda b(b-a-c)}}.$$

验算

- 量纲（dimensions）：λ 是力，所以 $mac(b-a)/(\lambda b(b-a-c))$ 的量纲是 $\mathrm{ML}/(\mathrm{MLT}^{-2}) = \mathrm{T}^2$，正是周期应有的量纲。
- 当 $c \to b-a$ 时，平衡张力消失，周期变成无限大：松弛的弦不提供恢复力（restoring force），这是合理的。
- 数值上，取 $a = 1$、$b = 2.5$、$c = 0.7$、$\lambda = 3$、$m = 0.5$，公式给出周期 1.8586。从一个微小位移出发，以数值方法逐步推进精确的运动（力直接由 B 的位置计算），得出的值在六位有效数字内相同。在随机选取的位置上，精确的运动方程亦与直接的向量分解结果吻合。

常见错误

- 符号弄错：切向拉力指向 P，即指向 $\phi = 0$，所以它必须带负号。
- 以为平衡时张力为零。在平衡位置，弦被拉长至长度 $b-a > c$，所以张力是 $\lambda(b-a-c)/c$，而正是这个张力提供恢复力。
- 使用 $\theta + \phi \approx \phi$。这里 θ 与 ϕ 同阶，把它略去会得出错误的周期。

STEP 之外

这里的方法是求微小振动频率的标准做法：找出平衡位置，把运动方程在其附近线性化（linearise），然后读出 ω^2。一个巧妙之处是，恢复力完全来自平衡张力通过弦方向的改变而产生的作用，这与绷紧的结他弦是同一机制。在大学一年级的课程中，这会发展为拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）和简正模（normal modes）；Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）是细心学习微小振动分析的好地方。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。