详细解答

STEP II 2010，第 9 题

力学 • 相撞的抛体

STEP II 2010，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

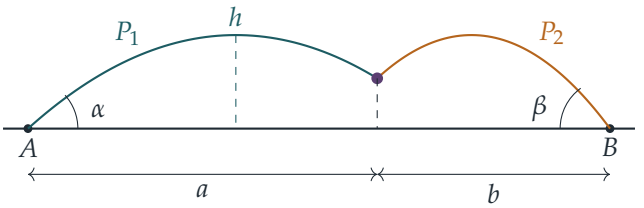
step.maths.org/questions/10-s2-q9

关键思路

两粒同时抛出的质点以相同的加速度 g 下落，所以要令两者在碰撞一刻的高度相等，唯一的可能是它们的初始竖直速度相等。这样两者的竖直运动便完全一样：最大高度同为 h，在同一时刻到达，而且（若没有碰撞）会在同一时刻落地。碰撞发生在飞行最高点与落地之间，而每粒质点走过的水平距离与时间成正比，因此这段距离被夹在两个简单的界限之间。

解答

我们把两粒质点都视为只受重力 g 作用、自由运动的抛射体（projectile），并忽略空气阻力（air resistance）。设 P_1 的速率为 u，P_2 的速率为 v，取抛出时刻为 $t = 0$，并设碰撞发生于时刻 $t_c > 0$。



相同的竖直运动

在时刻 t，P_1 与 P_2 的高度分别为

$$y_1 = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad y_2 = vt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

碰撞时 $y_1 = y_2$，故 $(u\sin\alpha - v\sin\beta)\,t_c = 0$；由于 $t_c > 0$，

$$u\sin\alpha = v\sin\beta.$$

因此两粒质点的竖直运动完全相同。特别地，两者在同一时刻 T 到达相同的最大高度 h，其中

$$T = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{v\sin\beta}{g}, \qquad h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{v^2\sin^2\beta}{2g},$$

而且两者都会在时刻 $2T$ 回到地面。

想一想 “在空中”和“在 P_1 到达其最大高度之后”这两个条件，告诉了我们关于 t_c 的甚么信息?

P_1 在时刻 T 位于最高点，所以“之后”给出 $t_c > T$。两粒质点只在 $0 < t < 2T$ 期间位于地面之上，所以要在空中碰撞，便需要 $t_c < 2T$。因此

$$T < t_c < 2T.$$

b 的界限

在水平方向上，P_2 以恒定速率 $v\cos\beta$ 运动，所以 $b = v\cos\beta\, t_c$。在时刻 T，它走过的水平距离会是

$$v\cos\beta\, T = \frac{v^2\sin\beta\cos\beta}{g} = \frac{v^2\sin^2\beta}{2g}\cdot\frac{2\cos\beta}{\sin\beta} = 2h\cot\beta.$$

因此

$$b = v\cos\beta\, T\cdot\frac{t_c}{T} = 2h\cot\beta\cdot\frac{t_c}{T},$$

又由于 $1 < t_c/T < 2$，且 $2h\cot\beta > 0$（因为 β 是锐角），

$$2h\cot\beta < b < 4h\cot\beta,$$

得证。

a 的界限

完全同理，$a = u\cos\alpha\, t_c$，而

$$u\cos\alpha\, T = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = 2h\cot\alpha,$$

所以 $a = 2h\cot\alpha\cdot t_c/T$，再由 $1 < t_c/T < 2$ 得

$$2h\cot\alpha < a < 4h\cot\alpha.$$

这里用的是同一个 h：按定义，h 是 P_1 的最大高度；而由于两者的竖直运动完全相同，它同时也是 P_2 的最大高度。

验算

- 边界情况：若碰撞恰好发生在最高点（$t_c = T$），则 $a = 2h\cot\alpha$，即熟悉的半射程（half-range）$\frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}$；若碰撞发生在落地一刻（$t_c = 2T$），则 $a = 4h\cot\alpha$，即全射程 $\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$。题目中的严格不等式正好介乎两者之间。
- 数值验证：取 $g = 9.8$、$u = 20$、$\alpha = 0.7$、$\beta = 0.9$（弧度），$v = u\sin\alpha/\sin\beta$ 及 $t_c = 1.5T$，得 $h \approx 8.470$ 及 $a \approx 30.17$，介乎 $2h\cot\alpha \approx 20.11$ 与 $4h\cot\alpha \approx 40.22$ 之间（事实上它恰好等于 1.5×20.11）。我们用这个方法测试了 20 000 个随机设置，逐步模拟 P_1 的运动以确认 h，并检查两粒质点确实重合。

常见错误

- 把两粒质点到达碰撞点的时间当作不同：它们是同时抛出的，所以两者用的是同一个 t_c。
- 忘记解释上界的由来：上界来自碰撞发生在空中，即在共同落地时刻 $2T$ 之前。

STEP 之外

关键的一步是转换参考系（frame of reference）：在一个以加速度 g 自由下落的参考系中，两粒质点都以恒定速度沿直线运动，所以只有当它们在该参考系中互相瞄准时才会碰撞，这正是经典的“猴子与猎人”（monkey and hunter）问题的思路。以加速参考系思考问题，以及当加速度不均匀时随之出现的惯性力（fictitious forces），是大学一年级力学的核心主题。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）讨论了抛射体、相对运动及非惯性参考系（non-inertial frames），并附有大量优秀习题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。