详细解答

STEP II 2010，第 8 题

纯数学 · 曲线之间的面积

STEP II 2010，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s2-q8

关键思路

由于 $\sin x \le 1$，曲线 $y = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ 永远不会高于 $y = \mathrm{e}^{-x}$；两者恰好在 $\sin x = 1$ 之处相遇，而且在该处只是相切（touch）。因此每一块面积都只是 $\mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)$ 在相邻两个切点之间的单一积分，毋须担心正负号改变。$\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 的积分是标准的“分部积分两次”题型，而由于积分上下限全都是 $\sin x = 1$ 及 $\cos x = 0$ 的点，反导数（antiderivative）在这些点上会化简成非常简单的式子。

解答

草图

C_1 是大家熟悉的衰减指数函数（decaying exponential），由 $(0,1)$ 开始，递减并趋向 0。C_2 是一条阻尼正弦波（damped sine wave）：它由原点开始，在 π 的每个倍数处都等于零，而且因为 $-1 \le \sin x \le 1$，它被夹在 $y = \mathrm{e}^{-x}$ 与 $y = -\mathrm{e}^{-x}$ 之间。振荡幅度收缩得非常快；第一个负向凹陷的深度已只有约 0.014（在 $x = \frac{5\pi}{4}$ 处）。

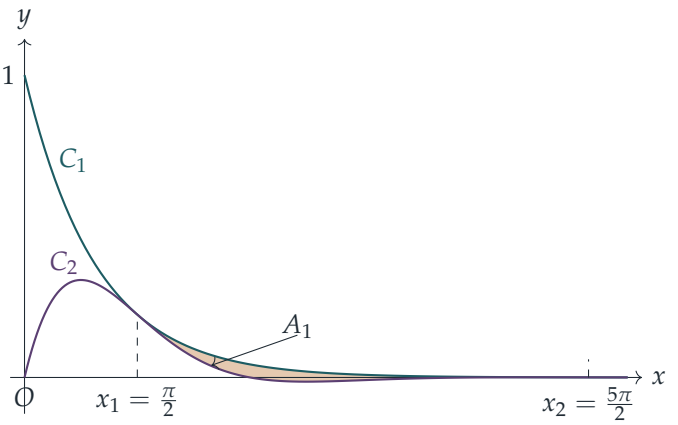
两条曲线在哪里相遇？由于 $\mathrm{e}^{-x} > 0$，

$$\mathrm{e}^{-x}\sin x = \mathrm{e}^{-x} \iff \sin x = 1 \iff x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

在这些点上，两条曲线相切而非相交：C_2 处处位于 C_1 之上或之下。事实上，两者在该处的斜率（gradient）亦相同，因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x}\sin x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = -\mathrm{e}^{-x} \quad \text{当 } \sin x = 1,\ \cos x = 0.$$

留意 C_2 的第一个极大值在 $x = \frac{\pi}{4}$（即 $\cos x = \sin x$ 之处），早于在 $x = \frac{\pi}{2}$ 的第一个切点：草图应显示 C_2 先到达峰顶，然后回落，与 C_1 相切。



面积 A_n

第 n 个切点是方程 $\sin x = 1$ 在 $x > 0$ 时的第 n 个解：

$$x_n = \tfrac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi = \tfrac{(4n-3)\pi}{2}, \qquad x_{n+1} = x_n + 2\pi.$$

在 x_n 与 x_{n+1} 之间，有 $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\sin x = \mathrm{e}^{-x}(1-\sin x) \geq 0$，所以 C_1 在整段区间都是上边界，因此

$$A_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

? **想一想** 怎样求 $\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 的积分?

进行两次分部积分（integration by parts），便会回到原本的积分。设 $I = \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$。先取 $u = \sin x$、$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 进行分部积分，再取 $u = \cos x$ 做一次，

$$\begin{aligned} I &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \int \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x - \mathrm{e}^{-x}\cos x - \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

所以 $2I = -\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x)$，而 $I = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) + c$。（你可以通过求导来验证。）

因此 $\mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)$ 的一个反导数是

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x).$$

巧妙之处来了：在每个切点上都有 $\sin x = 1$ 及 $\cos x = 0$，所以在这些点上

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

因此，利用 $x_{n+1} = x_n + 2\pi$，

$$\begin{aligned} A_n = F(x_{n+1}) - F(x_n) &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n-2\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n-2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1). \end{aligned}$$

最后，$x_n + 2\pi = \frac{(4n-3)\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{(4n+1)\pi}{2}$，所以

$$A_n = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-(4n+1)\pi/2},$$

此即所求。

无穷级数之和

由公式可见 $A_{n+1} = \mathrm{e}^{-2\pi}A_n$，所以各面积组成一个几何级数（geometric series），首项为 $A_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-5\pi/2}$，公比（common ratio）为 $r = \mathrm{e}^{-2\pi}$。由于 $0 < r < 1$，该级数收敛（converges），而且

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_1}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi}} &= \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-5\pi/2}}{\mathrm{e}^{-2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}. \end{aligned}$$

验算

- 总和就是 x_1 右方两曲线之间的全部面积，所以它应等于 $\int_{\pi/2}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty} F(X) - F(\frac{\pi}{2}) = 0 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}$。结果的确如此，而且完全不需要用到级数。
- 数值上，$A_1 \approx 0.10375$，而 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2} \approx 0.10394$：正如草图所示，几乎全部面积都在第一个区域内，因为 $\mathrm{e}^{-2\pi} \approx 0.0019$。对 $\mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ 上使用辛普森法则（Simpson's rule），得到相同的 0.103746。

常见错误

- 误以为切点就是 C_2 的极大值点。极大值在 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$；两曲线则在 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 相切。
- 把 $\sin x = \pm 1$ 的每个解都算进去，或把 $\sin x = 1$ 的解当作相隔 π：相邻两个切点相隔 2π。
- 计算 $\int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$ 时弄错正负号。把答案求导来检查一下。

STEP 之外

曲线 C_2 是阻尼振荡的形状，即有摩擦的弹簧的运动，而包络线（envelope）$\pm e^{-x}$ 决定了振荡衰减的快慢。像 $\int e^{-x} \sin x \, dx$ 这类积分，若视为 $\int e^{(-1+i)x} \, dx$ 的虚部（imaginary part）来计算，会快得多；这个技巧在大学一年级的微分方程（differential equations）及拉普拉斯变换（Laplace transforms）课程中经常用到。Boyce 与 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）详细讨论了阻尼振荡。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。