详细解答

STEP II 2010，第 7 题

纯数学 · 三次方程

STEP II 2010，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s2-q7

关键思路

首项系数(leading coefficient)为正的三次曲线,当且仅当它的两个转向点(turning points)位于轴的同一侧时，才只与轴相交一次。第 (ii) 部分是解不含 x^2 项三次方程的经典技巧：选取代换 $x = u + q/u$，使 x^3 中的交叉项与 $-3qx$ 互相抵消，剩下一条关于 u^3 的二次方程。而第 (iii) 部分原来是同一条三次方程换了个样子，只是以 p 代替 x。

解答

第 (i) 部分

设 $f(x) = x^3 - 3qx - q(1+q)$。则 $f'(x) = 3x^2 - 3q$，它在 $x = \pm\sqrt{q}$ 处为零（由于 $q > 0$，两者均为实数）。由于 $f''(x) = 6x$，$x = -\sqrt{q}$ 处的点是局部极大点（local maximum），而 $x = \sqrt{q}$ 处的点是局部极小点（local minimum）。

在局部极大点，

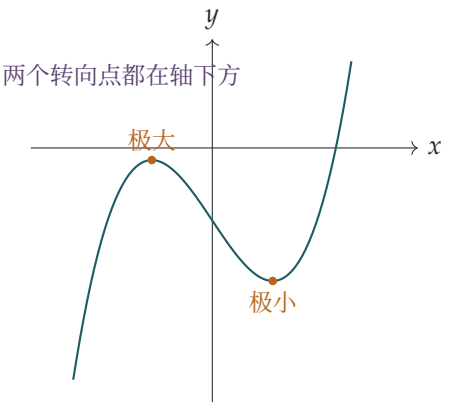
$$\begin{aligned} f(-\sqrt{q}) &= -q\sqrt{q} + 3q\sqrt{q} - q - q^2 \\ &= -q(q - 2\sqrt{q} + 1) \\ &= -q(\sqrt{q} - 1)^2. \end{aligned}$$

由于 $q > 0$ 且 $q \neq 1$（因此 $\sqrt{q} \neq 1$），此值严格小于零。局部极小值更低：

$$f(\sqrt{q}) = q\sqrt{q} - 3q\sqrt{q} - q - q^2 = -2q\sqrt{q} - q - q^2 < 0.$$

所以两个转向点都在 x 轴下方。当 $x < \sqrt{q}$ 时，曲线永远不会高于其局部极大值，而该值为负，因此曲线在此范围内不与轴相交。当 $x > \sqrt{q}$ 时，函数严格递增，由负值增至 $+\infty$，

因此恰好与轴相交一次。故此曲线只与 x 轴相交一次。



第 (ii) 部分

用二项式定理（binomial theorem）将 $x = u + q/u$ 立方，

$$\begin{aligned} x^3 &= u^3 + 3u^2 \cdot \frac{q}{u} + 3u \cdot \frac{q^2}{u^2} + \frac{q^3}{u^3} \\ &= u^3 + \frac{q^3}{u^3} + 3q\left(u + \frac{q}{u}\right) = u^3 + \frac{q^3}{u^3} + 3qx. \end{aligned}$$

所以 $x^3 - 3qx = u^3 + q^3/u^3$，三次方程变为

$$u^3 + \frac{q^3}{u^3} = q(1+q).$$

两边乘以 u^3（注意代换要有意义，须有 $u \neq 0$），得 u^3 所满足的二次方程

$$(u^3)^2 - q(1+q)\,u^3 + q^3 = 0.$$

想一想 这条二次方程怎样因式分解?

两根之和必须为 $q + q^2$，两根之积为 $q^3 = q \cdot q^2$，所以两根是 q 和 q^2：

$$(u^3 - q)(u^3 - q^2) = 0.$$

取实数立方根，得 $u = q^{1/3}$ 或 $u = q^{2/3}$。两者给出相同的 x：

$$q^{1/3} + \frac{q}{q^{1/3}} = q^{1/3} + q^{2/3}, \qquad q^{2/3} + \frac{q}{q^{2/3}} = q^{2/3} + q^{1/3}.$$

直接验证：设 $s = q^{1/3}$ 及 $x = s + s^2$，则 $x^3 = s^3 + 3s^4 + 3s^5 + s^6$ 而 $3qx = 3s^4 + 3s^5$，所以 $x^3 - 3qx = s^3 + s^6 = q(1+q)$。由第 (i) 部分，当 $q > 0$、$q \neq 1$ 时，此三次方程只有一个实根，所以该实根为

$$x = q^{1/3} + q^{2/3}.$$

第 (iii) 部分

由于 $\alpha+\beta=p$ 及 $\alpha\beta=q$，

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=p^3-3qp,$$

此即所求。

若其中一根是另一根的平方，则 $\alpha^2=\beta$ 或 $\beta^2=\alpha$，因此无论哪种情况都有

$$(\alpha^2-\beta)(\beta^2-\alpha)=0.$$

这个式子关于 α 和 β 对称（symmetric），所以可以用 p 和 q 表示。展开得

$$\begin{aligned}(\alpha^2-\beta)(\beta^2-\alpha)&=\alpha^2\beta^2-(\alpha^3+\beta^3)+\alpha\beta\\&=q^2-(p^3-3qp)+q.\end{aligned}$$

令此式等于零，得到关系式

$$p^3-3qp-q(1+q)=0.$$

这正是第 (ii) 部分的三次方程，只是以 p 代替 x。当 $q>0$、$q\neq1$ 且 p 为实数时，p 必然是它唯一的实根，所以

$$p=q^{1/3}+q^{2/3}.$$

这是合理的：此时两根为 $\alpha=q^{1/3}$ 及 $\beta=q^{2/3}=\alpha^2$，其和为 p，其积为 q。

验算

取 $q=8$：第 (ii) 部分给出 $x=2+4=6$，而确实 $216-144-72=0$。在第 (iii) 部分，$p=6$ 给出 $t^2-6t+8=(t-2)(t-4)$，且 $4=2^2$。我们用电脑对数以千计的随机 q 验证了 (i) 中两个转向点的函数值，对随机复数 u 验证了恒等式 $x^3-3qx=u^3+q^3/u^3$，并确认 $p=q^{1/3}+q^{2/3}$ 总是给出一对其中一根为另一根平方的根。

常见错误

- 在 (i) 中只检查局部极小值为负。单凭这一点，曲线仍可能与轴相交三次；关键在于局部极大值为负，而这正是用到 $q\neq1$ 的地方。
- 在 (ii) 中担心 u^3 的两个值会给出两个不同的根。它们给出相同的 x，这是必然的，因为 u 和 q/u 的地位是对称的。

STEP 之外

(ii) 中的代换是一般三次方程的卡尔达诺公式（Cardano's formula）的核心，也正是在这里，复数（complex numbers）在数学中首次变得无可回避：当三次方程有三个实根时，关于 u^3 的二次方程反而有复数根。被排除的情况 $q = 1$ 是一个很好的例子。此时 $p = -1$ 也是允许的，而 $t^2 + t + 1 = 0$ 的根是 ω 和 ω^2，即单位的复数立方根（complex cube roots of unity），两者互为对方的平方。至于多项式方程何时可以用根式（radicals）求解，完整的故事就是伽罗瓦理论（Galois theory），Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）对此有很好的讲述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。