详细解答

STEP II 2010，第 6 题

纯数学 · 正四面体的几何

STEP II 2010，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

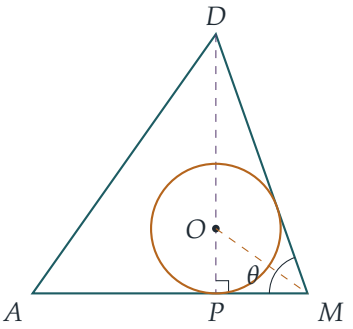
step.maths.org/questions/10-s2-q6

关键思路

正四面体（regular tetrahedron）的对称性极高，几乎所有事情都发生在同一个铅垂截面（cross-section）上：通过一条棱的中点、其对顶点和顶尖的那个平面。在这个平面内，每个立体问题都化为一个直角三角形。至于球，对称性告诉我们球心必定在哪里，而第 (ii) 部分求得的角则告诉我们球心与每个面相距多远。

解答

以下一律设 M 为 BC 的中点。每个面都是边长为 1 的等边三角形，所以每条中线（median）（例如 AM 或 DM）的长度为 $\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。



第 (i) 部分

由于 D 与 A、B、C 等距，而 DP 垂直于平面 ABC，由毕氏定理（Pythagoras' theorem）得 $PA^2=DA^2-DP^2=DB^2-DP^2=PB^2$，同理 $PB=PC$。所以 P 是等边三角形 ABC

的外心（circumcentre），亦即它的形心（centroid）。形心位于每条中线上由顶点起计三分之二的位置，所以

$$PA = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \qquad PM = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{2\sqrt{3}}.$$

然后，由三角形 DPA 中位于 P 的直角，得

$$PD^2 = DA^2 - PA^2 = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}, \qquad \text{所以} \qquad PD = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

第 (ii) 部分

六条棱的情况完全相同（四面体的对称变换可以把任何一条棱移到任何另一条棱上），所以只需求出面 ABC 与面 DBC 之间的夹角 θ，这两个面相交于 BC。

? **想一想** 图中哪一个角才*真正*是这两个面之间的夹角？

两个平面相交于一条直线时，它们的夹角要用两条直线来量度：两条直线各在一个平面内，并且在同一点上垂直于交线。在等边三角形 ABC 中，中线 AM 垂直于 BC；在等边三角形 DBC 中，中线 DM 垂直于 BC。所以 $\theta = \angle AMD$，而由于 P 在 AM 上，介乎 A 与 M 之间，故亦有 $\theta = \angle PMD$。

三角形 DPM 在 P 处有一直角，其中 $PM = \frac{1}{2\sqrt{3}}$，斜边 $DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$。因此

$$\cos\theta = \frac{PM}{DM} = \frac{1/(2\sqrt{3})}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3},$$

正如所求。（作为验算，$PD^2 = DM^2 - PM^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$，与第 (i) 部分吻合。）

第 (iii) 部分

最佳的球。设 O 为 DP 上满足 $OP = r$ 的点，其中 r 有待求出，使得 O 与三个斜面的距离也同样是 r。根据对称性，只需处理面 DBC。

平面 AMD 垂直于 BC（它包含 AM 和 DM，两者都垂直于 BC），所以它垂直于面 DBC，而由 O 到该面的垂线就在这个截面之内：它就是由 O 到直线 MD 的垂线。由于 O 与直线 MP 的距离为 OP，与直线 MD 的距离为 r，而我们想这两个距离相等，所以 O 必须在 M 处的角 θ 的角平分线（bisector）上。于是

$$r = PM\tan\tfrac{\theta}{2}.$$

由第 (ii) 部分，利用 $\tan^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$，

$$\tan^2\tfrac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad \tan\tfrac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

（取正值，因为 θ 是锐角）。因此

$$r = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

以 O 为球心、半径为 $\frac{\sqrt{6}}{12}$ 的球与四个面全部相切，而且位于四面体之内，因为 O 是一个内点，与每个面的距离都至少为 r。

? **想一想** 我们怎样知道，无论把球放在哪里，都不可能比这个球更大?

再大就放不下。在四面体内任取一点 X，设它与四个面的距离为 d_1, d_2, d_3, d_4。把 X 与各顶点连起来，便将四面体分成四个棱锥（pyramid），每个面上各有一个，每个的底面积都是 $\frac{\sqrt{3}}{4}$。把它们的体积相加，

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{4} (d_1 + d_2 + d_3 + d_4).$$

但取 $X = D$（此时三个距离为 0，余下一个为 PD）可知 $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} PD$。因此对每一个内点都有

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = PD = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

以 X 为球心、半径为 ρ 的球，只有在每个 $d_i \geq \rho$ 时才能放在四面体之内，所以 $4\rho \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$，即 $\rho \leq \frac{\sqrt{6}}{12}$。所以最大的球的半径为

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12} = \tfrac{1}{4} PD,$$

等号恰好在四个距离全部相等时（即在 O 处）成立。

验算

- 坐标：取 $A = (0,0,0)$、$B = (1,0,0)$、$C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$、$D = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \sqrt{2/3})$，则六条棱的长度全为 1，而 $PD \approx 0.8165$。
- 任意两个面的向外单位法向量（unit normal）的点积（dot product）为 $-\frac{1}{3}$，印证了 $\cos\theta = \frac{1}{3}$（约 70.5°）。
- 点 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12})$ 与四个面的距离全为 $0.20412\ldots = \frac{\sqrt{6}}{12}$。随机选取的内点，其距离之和总是 $0.8165\ldots$，而其中最小的距离从不超过 0.2041。
- 球心位于 PD 上由底部起计四分之一的高度。这与以下事实吻合：正四面体的内心（incentre）就是它的形心，而形心位于由一个面到其对顶点的四分之一处。

常见错误

- 把 $\angle DAM$ 或 $\angle DBA$ 当作两个面之间的夹角。所用的两条直线必须都垂直于公共棱，而 DM 和 AM 正是如此。
- 把 PA 当作中线的一半，而不是中线的三分之二。
- 求出了与四个面相切的球，却没有说明为何放在别处的球不可能更大。距离之和的恒等式只需两行便可解决这一点。

STEP 之外

到各个面的距离之和为常数，这是等边三角形的维维亚尼定理（Viviani's theorem）的三维版本。它源自重心坐标（barycentric coordinates），即把单纯形（simplex）内任何一点表示为其顶点的加权平均。角 $\arccos\frac{1}{3}$ 在化学中也会出现：甲烷中键与键之间的夹角是 $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.5°$，亦即同一个四面体的两个顶点在中心所张的角。想看更多这类立体推理，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；若想了解运用点积和叉积（cross product）的向量方法，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。