详细解答

STEP II 2010，第 5 题

纯数学 · 向量夹角与圆锥

> **STEP II 2010，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q5

关键思路

这一题的一切都归结为一个事实：方向为 $\mathbf{d}$ 的直线与向量（vector）$\mathbf{a}$ 之间的夹角 θ 满足 $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\,|\mathbf{a}|}$。“倾角相等”和“倾角为 α”都可以直接化为关于 $\mathbf{d}$ 各分量（components）的方程。至于最后一部分，留意那个笛卡儿方程（Cartesian equation）与你刚刚求得的关系式形状相同。通过 O 而与某条固定直线成相同夹角的所有直线，合起来就是一个圆锥（cone）。

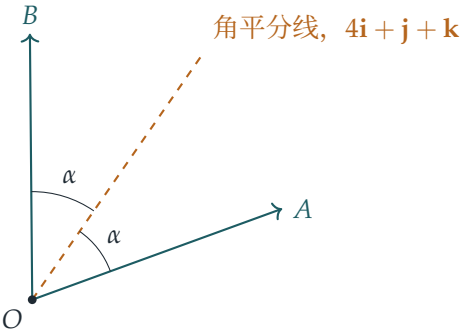
解答

设 $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{b} = 5\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$，则 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$ 而 $|\mathbf{b}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$。另外 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 5-1-1 = 3$。因此

$$\cos 2\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

由于 $\cos 2\alpha > 0$，角 2α 是锐角，所以 α 介乎 0 与 $\frac{\pi}{4}$ 之间。稍后我们会用到

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) = \tfrac{2}{3}.$$



（此图只是平面 OAB 的示意图。）

第 (i) 部分

设 $\mathbf{d} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ 为 L_1 的方向。$\mathbf{d}$ 与 OA 及 OB 所成夹角的余弦分别是

$$\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\sqrt{3}} = \frac{m+n+p}{\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|} \qquad \text{及} \qquad \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{d}|\,3\sqrt{3}} = \frac{5m-n-p}{3\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|}.$$

由于 cos 在 $[0,\pi]$ 上是一对一（one-to-one）的，夹角相等即余弦相等。两边同乘 $3\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|$，得

$$3(m+n+p) = 5m-n-p \quad\Longleftrightarrow\quad m = 2(n+p).$$

> **想一想** 直线本身并没有指定的方向。假如直线与 OA 成角 θ，但与 OB 成角 $\pi-\theta$，那又如何？

如果我们把“两条直线之间的夹角”理解为锐角的那一个，那么两个余弦只需在相差一个正负号的意义下相等。取另一个符号，得 $3(m+n+p) = -(5m-n-p)$，即 $4m+n+p = 0$。这些直线位于通过 O 且垂直于角平分线的平面上，而该平面包含 $\angle AOB$ 的外角平分线（external bisector）。题目预期的答案是 $m = 2(n+p)$，但知道还有第二族直线存在，也是值得的。

要求 $\angle AOB$ 的角平分线（bisector），我们把沿 OA 和 OB 方向的单位向量（unit vector）相加。两个单位向量之和平分它们之间的夹角，因为它们张成一个菱形（rhombus）。所以

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{3\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{8\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3\sqrt{3}},$$

于是可取 $m = 4$、$n = 1$、$p = 1$（或其任何非零倍数）。验算一下：$4 = 2(1+1)$，所以这个方向满足上面的关系式。

第 (ii) 部分

设 $\mathbf{e} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ 为 L_2 的方向。这条直线与 OA 成角 α，当且仅当

$$\frac{u+v+w}{\sqrt{3}\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \pm\cos\alpha.$$

这里的 $\pm$ 顾及了沿直线的两个指向。平方后正负号消失，再利用 $\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$，得

$$(u+v+w)^2 = 2(u^2+v^2+w^2).$$

把左边展开为 $u^2+v^2+w^2+2(vw+wu+uv)$ 并整理，便得到关系式

$$u^2+v^2+w^2 = 2(vw+wu+uv).$$

? **想一想** 一个关于方向的条件，怎样变成一个曲面?

任取一点 $(x,y,z) \neq (0,0,0)$。它恰好位于一条通过 O 的直线上，即方向为 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 的那条直线。根据第 (ii) 部分，该点满足

$$x^2+y^2+z^2 = 2(yz+zx+xy)$$

当且仅当它所在的那条通过 O 的直线与 OA 成角 α。原点也满足这个方程。因此，这个曲面（surface）就是所有通过 O 且与直线 OA 成倾角 α 的直线的并集。

这是一个**（双叶）直立圆锥（right circular cone）**，顶点在原点，轴为直线 $x=y=z$（即直线 OA）。它的半顶角（semi-vertical angle）α 满足

$$\cos\alpha = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \qquad \tan\alpha = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \alpha \approx 35.3^\circ,$$

即 $\angle AOB$ 的一半。它有两叶（nappes），因为 μ 取遍所有实数。第 (i) 部分的角平分线位于这个圆锥上：对于 $(4,1,1)$，我们有 $16+1+1 = 18 = 2(1+4+4)$。

验算

- 点 $(1,1,0)$ 满足 $2 = 2(0+0+1)$。它与 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 的夹角的余弦为 $2/(\sqrt{2}\sqrt{3}) = \sqrt{2/3}$，与预期相符。
- 数值上，$\arccos(1/3)/2 = 0.61548\,\text{rad}$，而角平分线 $4\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 与 OA 和 OB 所成的角都是 $0.61548\,\text{rad}$。
- 恒等式 $x^2+y^2+z^2-2(yz+zx+xy) = (x^2+y^2+z^2)(2-3c^2)$ 成立，其中 c 是与 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 所成夹角的余弦。所以左边等于零，当且仅当 $c^2 = \frac{2}{3}$。

常见错误

- 用 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 来求角平分线，而不是用单位向量之和。由于 $|\mathbf{b}| \neq |\mathbf{a}|$，$\mathbf{a}+\mathbf{b} = 6\mathbf{i}$ 并不是角平分线。
- 使用 $\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos 2\alpha$ 或类似的式子。这里需要的是倍角公式（double-angle formula）$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$。
- 只把曲面描述为“一个圆锥”，而没有指出它的顶点、轴和半顶角。

STEP 之外

这个圆锥的方程是一个二次型（quadratic form）：$\mathbf{x}^{\mathsf{T}} M\mathbf{x} = 0$，其中 M 是对称矩阵（symmetric matrix）。在大学一年级的线性代数（linear algebra）中，你会按 M 的特征值（eigenvalues）为这类曲面分类。这里 M 的对角线元素为 1，非对角线元素为 -1，所以它的特征值是 -1（沿 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 方向）和 2（二重）。一个负特征值加上两个相等的正特征值，正是圆锥的标志：它是一个圆形的圆锥，轴沿着那个与别不同的特征值所对应的特征向量（eigenvector）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）在讨论对称矩阵和二次型时，对此有详细的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。