详细解答

STEP II 2010，第 4 题

纯数学 · 代换积分法

STEP II 2010，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s2-q4

关键思路

代换（substitution）$u = a - x$ 会把区间的两端对调，并把 $f(x)$ 变成 $f(a-x)$，反之亦然。因此这个积分等于它的“拍档”，后者的分子正是分母的另一半。把两个版本相加，分子便等于分母，被积函数（integrand）就变成 1。题目余下的部分，就是要在伪装之下认出这个结构。第 (ii) 部分用的是同一招，只是代换改为 $x \mapsto 1/x$，它会把 $[\frac{1}{2}, 2]$ 的两端对调。

解答

第 (i) 部分

我们全程假设在 $[0, a]$ 上 $f(x) + f(a-x) \neq 0$，使被积函数有定义。在 I 中代入 $u = a - x$，于是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$。当 $x = 0$ 时，$u = a$；当 $x = a$ 时，$u = 0$。因此

$$I = \int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)}\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(u)+f(a-u)}\,\mathrm{d}u.$$

由于 u 是哑变量（dummy variable），我们可以把它改名为 x，这样便得到所需的 I 的第二种形式。

现在把 I 的两个表达式相加：

$$2I = \int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a, \qquad \text{所以} \qquad I = \frac{a}{2}.$$

第一个积分。

? **想一想** $f(x) + f(a-x)$ 藏在 $\ln(2 + x - x^2)$ 的哪里？

这个二次式可以因式分解：$2+x-x^2=(1+x)(2-x)$。所以

$$\ln(2+x-x^2)=\ln(1+x)+\ln(2-x),$$

这是成立的，因为两个因式在 $[0,1]$ 上都是正数。取 $a=1$ 及 $f(x)=\ln(1+x)$。那么 $f(1-x)=\ln(2-x)$，而被积函数正好是 $\dfrac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$。分母永不为零，因为在 $[0,1]$ 上 $2+x-x^2\geq 2$。因此

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\ln(2+x-x^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

第二个积分。用复角公式（compound-angle formula）展开分母：

$$\sin(x+\tfrac{\pi}{4})=\sin x\cos\tfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\tfrac{\pi}{4}=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}.$$

所以被积函数是 $\sqrt{2}\,\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$。取 $a=\frac{\pi}{2}$ 及 $f=\sin$，便有 $f(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$。分母 $\sin x+\cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上是正数。由上面的结果，

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi/2}{2}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}.$$

第 (ii) 部分

把这个积分记为 J。它的被积函数是 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{\sin x+\sin(1/x)}$。分母没有问题：对于 $x\in[\frac{1}{2},2]$，x 和 $1/x$ 都落在 $[\frac{1}{2},2]\subset(0,\pi)$ 之内，所以 $\sin x>0$ 且 $\sin(1/x)>0$。

? **想一想** 哪一个代换可以把 $\sin x$ 和 $\sin\frac{1}{x}$ 对调，同时保持上下限 $\frac{1}{2}$ 和 2?

答案是 $x=1/u$。这时 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u^2$。当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$u=2$；当 $x=2$ 时，$u=\frac{1}{2}$。因子 $\frac{1}{x}$ 变成 u，所以

$$J=\int_2^{1/2}u\cdot\frac{\sin(1/u)}{\sin(1/u)+\sin u}\cdot\Big(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\Big)=\int_{1/2}^2\frac{\sin(1/u)}{u(\sin u+\sin\frac{1}{u})}\,\mathrm{d}u.$$

把 u 改名为 x，再与 J 原来的形式相加：

$$2J=\int_{1/2}^2\frac{\sin x+\sin\frac{1}{x}}{x(\sin x+\sin\frac{1}{x})}\,\mathrm{d}x=\int_{1/2}^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\ln\tfrac{1}{2}=2\ln 2.$$

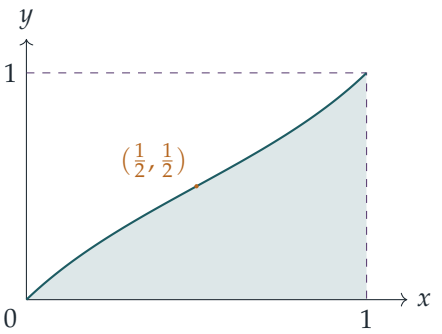
因此

$$\int_{1/2}^2\frac{\sin x}{x(\sin x+\sin\frac{1}{x})}\,\mathrm{d}x=\ln 2.$$

因子 $\frac{1}{x}$ 在这里是不可或缺的。测度（measure）$\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 在 $x\mapsto 1/x$ 之下保持不变（方向除外），正如 $\mathrm{d}x$ 在 $x\mapsto a-x$ 之下保持不变一样。

验算

- 被积函数 $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}$ 满足 $g(x) + g(a-x) = 1$。因此它的图像绕 $(\frac{a}{2}, \frac{1}{2})$ 旋转半圈后不变，所以曲线下的面积是 $a \times 1$ 长方形面积的一半。下图以第一个积分为例说明这一点。



- 数值上，用辛普森法则（Simpson's rule）计算，第一个积分得 0.500000，第二个得 1.110721（而 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4} \approx 1.110721$），第 (ii) 部分得 0.693147（而 $\ln 2 \approx 0.693147$）。

常见错误

- 改写 $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ 时漏掉因子 $\sqrt{2}$，结果得出 $\frac{\pi}{4}$ 而不是 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$。
- 在第 (ii) 部分，忘了跟进 $\frac{1}{x}$ 的去向：它变成 u，再与 $-\frac{1}{u^2}$ 合并，剩下 $-\frac{1}{u}$。

STEP 之外

这两招都利用了区间的一种对称性，而这种对称性令积分的“测度”保持不变：反射（reflection）$x \mapsto a - x$ 保持 $\mathrm{d}x$ 不变，而反演（inversion）$x \mapsto 1/x$ 保持 $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 不变。到了大学，这会发展成不变测度（invariant measure）的概念。例如，$\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 是正实数在乘法之下的自然测度，也是梅林变换（Mellin transform）的基础。关于代换法在实分析（real analysis）上的基础，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。想看更多 STEP 风格的积分技巧，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。