详细解答

STEP II 2010，第 3 题

纯数学 · 斐波那契数与递推关系

STEP II 2010，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s2-q3

关键思路

已知四项，未知数也有四个：把 $n = 0, 1, 2, 3$ 代入 $(*)$ 再解方程。窍门是用一条方程除以另一条，这样可以消去 a，并把条件化为关于 $\lambda + \mu$ 和 $\lambda\mu$ 的陈述。这两个对称函数（symmetric functions）使 λ 和 μ 成为某个二次方程（quadratic equation）的根。求出公式之后，第 (iii) 部分的和就可以拆成两个几何级数（geometric series）。

解答

第 (i) 部分

把 $n = 0, 1, 2, 3$ 代入 $(*)$，得

$$a + b = 0, \qquad a\lambda + b\mu = 1,$$
$$a\lambda^2 + b\mu^2 = 1, \qquad a\lambda^3 + b\mu^3 = 2.$$

由第一条得 $b = -a$，于是其余三条变为

$$a(\lambda - \mu) = 1, \qquad a(\lambda^2 - \mu^2) = 1, \qquad a(\lambda^3 - \mu^3) = 2.$$

特别地，由 $a(\lambda - \mu) = 1$ 可知 $a \neq 0$ 且 $\lambda \neq \mu$。因式分解，

$$\lambda^2 - \mu^2 = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu), \qquad \lambda^3 - \mu^3 = (\lambda - \mu)(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2),$$

所以把第二及第三条方程除以 $a(\lambda - \mu) = 1$（因为它不为零，所以可以这样做），得

$$\lambda + \mu = 1 \qquad \text{和} \qquad \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 2,$$

其中第二条正是所求的结果。

想一想 怎样从这两条方程求出 λ 和 μ 本身?

把第二条用和与积表示：$\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2=(\lambda+\mu)^2-\lambda\mu$，所以 $1-\lambda\mu=2$，即 $\lambda\mu=-1$。和为 1、积为 -1 的两个数是以下方程的根：

$$t^2-t-1=0,\qquad \text{所以}\qquad t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

哪一个根是 λ? 由 $a(\lambda-\mu)=1$ 及 $a>0$，需要 $\lambda-\mu>0$，所以 λ 是较大的根。于是 $\lambda-\mu=\sqrt{5}$，而

$$\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\qquad \mu=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\qquad a=\frac{1}{\sqrt{5}},\qquad b=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

（若把两根对调，则必须 $a=-1/\sqrt{5}$，这是不容许的。）反过来，由于上面每一步都可逆，这些值满足全部四条方程。

第 (ii) 部分

我们有 $F_6=(\lambda^6-\mu^6)/\sqrt{5}$。与其直接展开 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^6$，不如利用 λ 是 $t^2=t+1$ 的根这一事实来降次：

$$\begin{aligned}\lambda^2&=\lambda+1,\\ \lambda^3&=\lambda^2+\lambda=2\lambda+1,\\ \lambda^6&=(2\lambda+1)^2=4\lambda^2+4\lambda+1=4(\lambda+1)+4\lambda+1=8\lambda+5.\end{aligned}$$

μ 满足同一条二次方程，所以完全同样的推导亦成立，得 $\mu^6=8\mu+5$。因此

$$F_6=\frac{(8\lambda+5)-(8\mu+5)}{\sqrt{5}}=\frac{8(\lambda-\mu)}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=8.$$

第 (iii) 部分

利用 $(*)$，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n-\left(\frac{\mu}{2}\right)^n\right].$$

由于 $\lambda\approx 1.618$ 而 $\mu\approx -0.618$，两个公比（common ratio）$\lambda/2$ 和 $\mu/2$ 的模（modulus）都小于 1。所以两个几何级数都收敛（converge），我们可以把和拆成两者之差：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}&=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\lambda/2}-\frac{1}{1-\mu/2}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2-\lambda}-\frac{1}{2-\mu}\right]\\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\lambda-\mu}{(2-\lambda)(2-\mu)}=\frac{1}{4-2(\lambda+\mu)+\lambda\mu},\end{aligned}$$

这里用了 $\lambda-\mu=\sqrt{5}$。由 $\lambda+\mu=1$ 及 $\lambda\mu=-1$，分母为 $4-2-1=1$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}=1.$$

验算

公式应该给出整数：$F_4=(\lambda^4-\mu^4)/\sqrt{5}$，配合 $\lambda^4=3\lambda+2$ 得 $F_4=3$；而 $F_5=5$、$F_6=8$ 符合从前四项看到的规律 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$。至于第 (iii) 部分，部分和（partial sums）$0,\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{2},\ \frac{19}{32},\ldots$ 慢慢逼近 1；用数值方法把首 300 项相加，在机器精度内得 1.0000000。各项只以约 $(0.809)^n$ 的速度衰减，所以收敛得很慢。

常见错误

- 忘记利用 $a>0$ 来决定哪个根是 λ：没有这个条件，答案便不能确定。
- 除以 $\lambda-\mu$ 时没有说明它为何不为零（它不为零，因为 $a(\lambda-\mu)=1$）。
- 把无穷级数拆成两个级数时，没有检查每个级数是否收敛。

STEP 之外

这里的公式是斐波那契数（Fibonacci numbers）的比奈公式（Binet's formula），而所用的方法是处理线性递推关系（linear recurrences）的一般方法：λ 和 μ 是 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 的特征方程（characteristic equation）$t^2=t+1$ 的根。第 (iii) 部分其实是在 $x=\frac{1}{2}$ 处求生成函数（generating function）$\sum F_n x^n=x/(1-x-x^2)$ 的值（再取一半），结果同样是 1。生成函数是大学一年级组合数学（combinatorics）和概率的重要工具；关于黄金比例（golden ratio）λ 以及斐波那契数在连分数（continued fractions）理论中的角色，可参阅 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。