详细解答

STEP II 2010，第 2 题

纯数学 · 三角函数积分法

STEP II 2010，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s2-q2

关键思路

三次式 $7\sin x - 8\sin^3 x$ 看来不易积分，但只要留意到它其实由三倍角公式（triple-angle formula）砌成，即 $\sin 3x$ 的两倍再加上少许余项，问题便迎刃而解。接着利用余弦的三倍角公式，把答案变回 $c = \cos\alpha$ 的多项式（polynomial）。至于 Eustace 的积分，利用 $\sin^2\alpha = 1 - c^2$ 可把他那个（错误的）答案化为同一个变量，再比较两者，便得到一个 c 的四次方程（quartic），而题目已就它的根给了我们提示。

解答

三倍角公式

利用复角公式（addition formulae）及 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$，

$$\begin{aligned}\cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x,\end{aligned}$$

正如所求。同样地，利用 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$，

$$\begin{aligned}\sin 3x = \sin(2x + x) &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ &= 2\sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x \\ &= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x.\end{aligned}$$

第 (i) 部分

由正弦的公式可得 $8\sin^3 x = 6\sin x - 2\sin 3x$，所以

$$7\sin x - 8\sin^3 x = \sin x + 2\sin 3x.$$

这样积分便容易计算了：

$$\mathrm{I}(\alpha) = \Big[-\cos x - \tfrac{2}{3}\cos 3x\Big]_0^{\alpha} = -\cos\alpha - \tfrac{2}{3}\cos 3\alpha + 1 + \tfrac{2}{3}.$$

由余弦的公式，$\cos 3\alpha = 4c^3 - 3c$，所以

$$\mathrm{I}(\alpha) = -c - \tfrac{2}{3}(4c^3 - 3c) + \tfrac{5}{3} = -\tfrac{8}{3}c^3 + c + \tfrac{5}{3},$$

这正是我们要证明的结果。

至于使 $\mathrm{I}(\alpha) = 0$ 的 c 值：取 $\alpha = 0$，积分显然等于零，所以 $c = 1$ 符合要求（验算：$-\frac{8}{3} + 1 + \frac{5}{3} = 0$）。事实上这是唯一的值，因为 $8c^3 - 3c - 5 = (c-1)(8c^2 + 8c + 5)$，而当中二次式的判别式（discriminant）为 $64 - 160 < 0$。

第 (ii) 部分

按 Eustace 的法则，$\int \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2 x$ 及 $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin^4 x$，所以他算出的定积分（definite integral）之值为

$$\mathrm{E}(\alpha) = \Big[\tfrac{7}{2}\sin^2 x - 2\sin^4 x\Big]_0^{\alpha} = \tfrac{7}{2}s^2 - 2s^4, \qquad s = \sin\alpha.$$

为了与第 (i) 部分比较，写成 $s^2 = 1 - c^2$：

$$\mathrm{E}(\alpha) = \tfrac{7}{2}(1 - c^2) - 2(1 - c^2)^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}c^2 - 2c^4.$$

$\cos\beta = -\frac{1}{6}$ **这个值**。 当 $c = -\frac{1}{6}$ 时，

$$\mathrm{I}(\beta) = -\tfrac{8}{3}\cdot\big(-\tfrac{1}{216}\big) - \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{3} = \tfrac{1}{81} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{245}{162},$$
$$\mathrm{E}(\beta) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{36} - 2\cdot\tfrac{1}{1296} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{72} - \tfrac{1}{648} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{648} = \tfrac{245}{162}.$$

两者相等，所以 Eustace 只是碰巧得到 $\mathrm{I}(\beta)$ 的正确值。

所有 α 的值。 Eustace 的答案正确，当且仅当 $\mathrm{E}(\alpha) = \mathrm{I}(\alpha)$，即（乘以 6 并整理各项后）

$$12c^4 - 16c^3 - 3c^2 + 6c + 1 = 0.$$

? **想一想** 没有现成公式可用，我们怎样把这样的四次式因式分解（factorise）？

我们已经知道两个根。由刚才的计算，$c=-\frac{1}{6}$ 符合方程，所以 $6c+1$ 是一个因式。另外 $c=1$（即 $\alpha=0$）也必定符合，因为 I 和 E 在该处都等于 0。除去因式 $6c+1$（比较 c^3 和 c 的系数），

$$12c^4-16c^3-3c^2+6c+1=(6c+1)(2c^3-3c^2+1),$$

然后，由于 $c=1$ 是这个三次式的根，

$$2c^3-3c^2+1=(c-1)(2c^2-c-1)=(c-1)^2(2c+1).$$

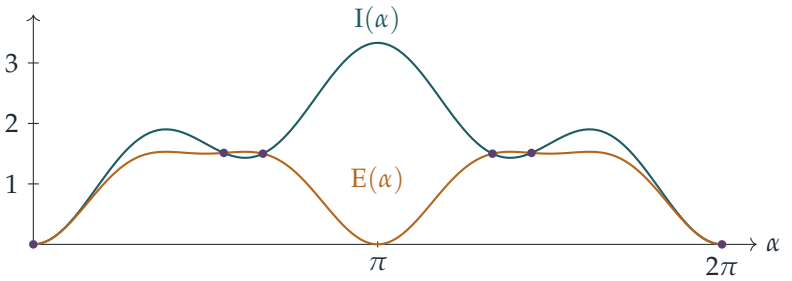
所以条件就是

$$(6c+1)(2c+1)(c-1)^2=0, \qquad \text{即} \qquad c=1,\ -\tfrac{1}{2}\ \text{或}\ -\tfrac{1}{6}.$$

由于 $c=\cos\alpha$，而 $[-1,1]$ 内每一个 c 值都对应某个 α，所以 Eustace 得到 $\mathrm{I}(\alpha)$ 的正确值，当且仅当对某个整数 n，

$$\alpha=2n\pi, \qquad \alpha=2n\pi\pm\tfrac{2\pi}{3}, \qquad \text{或} \qquad \alpha=2n\pi\pm\arccos\left(-\tfrac{1}{6}\right).$$

（负的 α 也已包括在内：I 和 E 都只通过 $\cos\alpha$ 取决于 α。）下图显示在 $0\le\alpha\le2\pi$ 的范围内，真正的积分（蓝绿色）和 Eustace 的答案（琥珀色）；两条曲线相交于 $\alpha=0$、$\frac{2\pi}{3}$、$\arccos(-\frac{1}{6})\approx1.738$，以及这些点关于 $\alpha=\pi$ 的镜像。



验算

- 当 $\alpha=\pi$ $(c=-1)$ 时，公式给出 $\mathrm{I}(\pi)=\frac{8}{3}-1+\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$，与 $\int_0^\pi(\sin x+2\sin 3x)\,\mathrm{d}x=2+\frac{4}{3}$ 吻合。
- 对原来的被积函数（integrand）使用森逊法则（Simpson's rule），得 $\mathrm{I}(\beta)\approx1.5123457$，与 $\frac{245}{162}=1.5123456\ldots$ 吻合；当 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ 时，积分和 Eustace 的答案都等于 1.5。

常见错误

- 忘记代入下限：$-\cos0-\frac{2}{3}\cos0=-\frac{5}{3}$，那个 $+\frac{5}{3}$ 正是由此而来。

- 没有发现 $c = 1$ 是四次方程的二重根，甚或完全遗漏了它，只写出 $c = -\frac{1}{2}$ 和 $c = -\frac{1}{6}$。
- 只给出 $[0, \pi]$ 内的 α；题目要求的是所有值。

STEP 之外

把 $\sin^3 x$ 这类幂写成 $\sin x$ 与 $\sin 3x$ 的组合，正是傅里叶分析（Fourier analysis）的起点：每一个幂 $\sin^n x$ 都是有限个 $\sin kx$ 或 $\cos kx$ 之和，利用 $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$ 便可很快求出。以 $\cos x$ 表示 $\cos nx$ 的多项式，就是切比雪夫多项式（Chebyshev polynomial）T_n，其中 $T_3(c) = 4c^3 - 3c$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）说明了为何有了棣美弗定理（de Moivre's theorem），这些恒等式全都变得自然而然。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。