详细解答

STEP II 2010，第 13 题

概率与统计 · 独立事件

> **STEP II 2010，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q13

关键思路

Rosalind 要合格，必须对 Pardeep 至少胜一局，并且对 Quentin 至少胜一局。“至少一次”用补集（complement）处理总是最容易：n 局中至少胜一局的概率，等于 1 减去全部落败的概率。各局独立（independent）时，每种策略的成功概率便是两个这类因子的乘积，而比较策略就是把两者之差因式分解（factorise）。以 $a = 1 - p$ 和 $b = 1 - q$ 表示落败的概率，可使代数运算保持简洁。

解答

我们假设不同对局的结果互相独立，并且无论之前发生过甚么，每局对 Pardeep（或 Quentin）的胜出概率都是 p（或 q）。对局的次序并不重要：无论她取得资格后是否停止比赛，她取得资格的结果都完全相同。

设 Rosalind 与 Pardeep 对赛 m 局、与 Quentin 对赛 n 局，令 A 为她对 Pardeep 至少胜一局的事件（event），B 为她对 Quentin 至少胜一局的事件。那么 $\mathrm{P}(A) = 1 - (1 - p)^m$，因为只有当她 m 局全败时 A 才不发生；同理 $\mathrm{P}(B) = 1 - (1 - q)^n$。这两个事件涉及不同的对局，所以互相独立，于是

$$\mathrm{P}(\text{获接纳}) = (1 - (1 - p)^m)(1 - (1 - q)^n).$$

以下一律记 $a = 1 - p$ 和 $b = 1 - q$。由于 $0 < p < q < 1$，我们有 $0 < b < a < 1$。

第 (i) 部分

与 Pardeep 对赛两局、与 Quentin 对赛一局，成功概率为 $(1 - a^2)(1 - b)$；与 Quentin 对赛两局、与 Pardeep 对赛一局，成功概率为 $(1 - a)(1 - b^2)$。把各个平方差（difference

of squares）因式分解，

$$\begin{aligned}(1-a^2)(1-b)-(1-a)(1-b^2) &= (1-a)(1-b)[(1+a)-(1+b)]\\ &= (1-a)(1-b)(a-b)\\ &= pq(q-p).\end{aligned}$$

由于 $p,q>0$ 且 $q>p$，此式严格为正。所以与 Pardeep 对赛两局，获接纳的机会较大，她应该选择这个方案。

第 (ii) 部分

三种策略的成功概率分别为

$$S_1=(1-a^3)(1-b),\qquad S_2=(1-a^2)(1-b^2),\qquad S_3=(1-a)(1-b^3).$$

三者都含有因子 $(1-a)(1-b)=pq$，因为 $1-x^k=(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1})$。

策略 1 必定胜过策略 3。我们有

$$\begin{aligned}S_1-S_3 &= pq[(1+a+a^2)-(1+b+b^2)]\\ &= pq\,(a-b)(1+a+b)>0,\end{aligned}$$

因为 $a>b$。所以策略 3 永远不是最佳选择，只需比较策略 1 和策略 2。

策略 1 对策略 2。我们有

$$S_1-S_2=pq[(1+a+a^2)-(1+a)(1+b)]=pq[a^2-b(1+a)].$$

换回 p 和 q，

$$S_1-S_2=pq\,D,\qquad \text{其中}\qquad D=(1-p)^2-(1-q)(2-p).$$

由于 $pq>0$，策略 1 优于策略 2 当且仅当 $D>0$。

> ? **想一想** 条件 $q-p>\frac{1}{2}$ 怎样有助令 D 为正?

D 中唯一涉及 q 的项是 $-(1-q)(2-p)$，而由于 $2-p>0$，它随 q 增加而增加。所以我们把 q 换成条件所容许的最小值。若 $q-p>\frac{1}{2}$，则 $1-q<\frac{1}{2}-p$，又因为 $2-p>0$，

$$(1-q)(2-p)<(\tfrac{1}{2}-p)(2-p)=1-\tfrac{5}{2}p+p^2.$$

因此

$$D>(1-2p+p^2)-(1-\tfrac{5}{2}p+p^2)=\tfrac{1}{2}p>0.$$

所以 $S_1>S_2$，连同 $S_1>S_3$，这就证明了当 $q-p>\frac{1}{2}$ 时 Rosalind 应该选择策略 1。

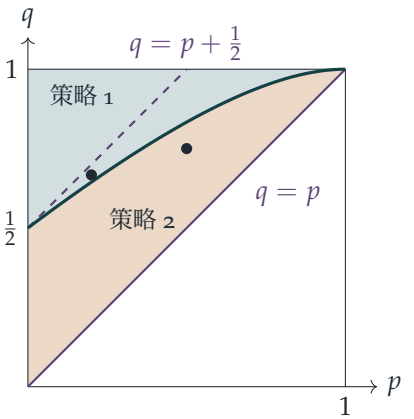
当 $q-p<\frac{1}{2}$ 时，两者都有可能较优。以下是两个例子：

- $p=\frac{1}{2}, q=\frac{3}{4}$（所以 $q-p=\frac{1}{4}$）。这时 $D=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{1}{8}<0$。事实上 $S_1=\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{4}=\frac{42}{64}$ 而 $S_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{16}=\frac{45}{64}$，所以**策略 2 较佳**。
- $p=\frac{1}{5}$，$q=\frac{2}{3}$（所以 $q-p=\frac{7}{15}<\frac{1}{2}$）。这时 $D=\frac{16}{25}-\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{5}=\frac{16}{25}-\frac{15}{25}=\frac{1}{25}>0$。事实上 $S_1=\frac{61}{125}\cdot\frac{2}{3}=\frac{122}{375}$ 而 $S_2=\frac{9}{25}\cdot\frac{8}{9}=\frac{120}{375}$，所以**策略 1 较佳**。

在 (p,q) 平面上，整个情况一目了然。令 $D=0$ 便得出边界曲线 $q=1-\dfrac{(1-p)^2}{2-p}$。可以验证

$$(p+\tfrac{1}{2})-\left(1-\frac{(1-p)^2}{2-p}\right)=\frac{p}{2(2-p)}>0,$$

所以该曲线位于直线 $q=p+\frac{1}{2}$ 稍下方。在曲线之上，策略 1 最佳；在曲线与对角线 $q=p$ 之间，策略 2 最佳。



图中两点就是上面的两个例子：$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ 位于策略 2 的区域内，而 $(\frac{1}{5},\frac{2}{3})$ 则刚好在曲线之上。

验算

在第 (i) 部分，令 $q\to 1$：对 Quentin 必胜，所以只有对 Pardeep 的对局才有影响，而这类对局显然愈多愈好，这与差值 $pq(q-p)\to p(1-p)>0$ 吻合。至于第 (ii) 部分，我们随机抽取了 2000 对满足 $p<q$ 的数值，以分数精确地列举全部 2^4 种结果，确认了 S_1, S_2, S_3 的公式和各个因式分解。以 $p=\frac{1}{2}$、$q=\frac{3}{4}$ 进行模拟（simulation），得出 $S_1\approx 0.657$ 和 $S_2\approx 0.703$，而精确值为 $\frac{21}{32}=0.65625$ 和 $\frac{45}{64}\approx 0.7031$。

常见错误

- 把“至少胜一局”的概率算成 mp 而不是 $1-(1-p)^m$；把互相重叠的事件的概率相加，会重复计算。
- 忘记策略 3：要证明策略 1 最佳，必须同时胜过另外两种策略。
- 举出 $q-p<\frac{1}{2}$ 的例子，却没有检查条件 $0<p<q<1$。

STEP 之外

直觉告诉我们“把力气花在自己最弱的地方”，但第二部分显示这并非永远正确：多对 Pardeep 一局的效益会递减（diminishing returns），而当 p 不太小时，多对 Quentin 一局更为划算。把固定数目的试验分配到各处，使若干个“至少成功一次”的概率之积达到最大，正是可靠性理论（reliability theory）和实验设计（design of experiments）背后那类最优化（optimisation）问题的一个小例子。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）仔细讲解了独立性和补集，并有许多同类风格的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。