详细解答

STEP II 2010，第 11 题

力学 · 三力平衡

STEP II 2010，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s2-q11

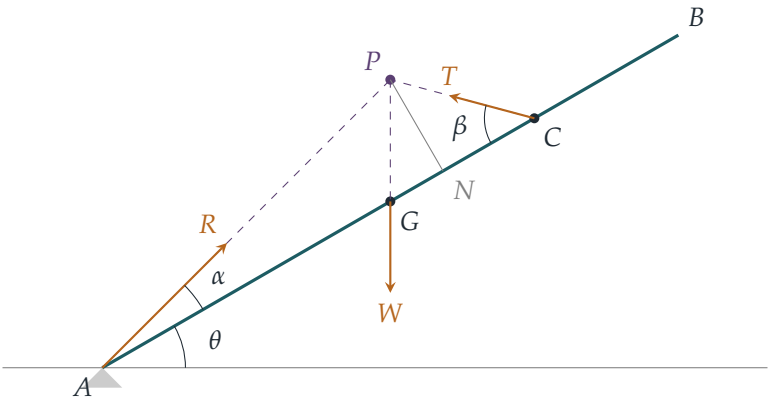
关键思路

作用于杆上的力只有三个：杆的重量、A 点的反作用力（reaction）和 C 点的张力（tension）。当三个互不平行的力使一个物体保持平衡（equilibrium）时，它们的作用线（line of action）必定通过同一点。因此，由 A 出发的反作用力所在直线、由 C 出发的绳所在直线，以及通过杆中点的铅垂线，三者相交于一点。从这个公共点出发，沿杆的方向和垂直于杆的方向量度距离，整道题便化为简单的直角三角学，完全不必求出各个力的大小。

解答

模型与图示

我们把杆视为均匀刚性杆（uniform rigid rod），所以它的重量 W 作用于中点 G，其中 $AG = 2L$。绳是轻绳，所以它在 C 点沿绳本身的方向拉着杆，其中 $AC = 3L$。支承在 A 点对杆施加单一个力 R（题目没有说明支承是光滑还是粗糙，而我们也不需要知道）。下图按比例绘出 $\theta = 30°$、$\beta = 45°$ 的情况。



证明公式

重量沿铅垂方向作用，其作用线通过 G；绳的作用线通过 C，反作用力的作用线则通过 A。这三条直线并不平行，所以三者都通过同一点，我们称这点为 P。

? **想一想** 为甚么三条作用线必定相交于一点?

设 R 和 T 的作用线相交于 P。对 P 取力矩（moment），R 和 T 的力矩都是零，所以杆若要处于转动平衡，重量对 P 的力矩也必须是零。这就表示通过 G 的铅垂线同样通过 P。

设 N 为由 P 到杆的垂足，并设 $h = PN$。在直角三角形 PNA 中，A 处的角是 α，所以 $AN = h\cot\alpha$。在直角三角形 PNC 中，C 处的角是 β，所以 $NC = h\cot\beta$。由于 $AN + NC = AC$，

$$h\cot\alpha + h\cot\beta = 3L. \tag{1}$$

（若 α 或 β 是钝角，N 便落在 A 或 C 之外，但带正负号的长度 $h\cot\alpha$ 与 $h\cot\beta$ 之和仍然等于 AC，所以 (1) 在任何情况下都成立。）

现在利用第三条作用线。杆与水平线的夹角是 θ，所以垂线 PN 与铅垂线 PG 的夹角也是 θ。在直角三角形 PNG 中，P 处的角是 θ，所以 $GN = h\tan\theta$，而且 N 位于 G 的上方一侧（离 A 较远），如图所示。因此

$$h\cot\alpha = AN = AG + GN = 2L + h\tan\theta. \tag{2}$$

由 (1) 减去 (2)，得 $h\cot\beta = L - h\tan\theta$，即

$$L = h(\cot\beta + \tan\theta).$$

把 L 的这个值代入 (2)：

$$h\cot\alpha = 2h(\cot\beta + \tan\theta) + h\tan\theta = h(3\tan\theta + 2\cot\beta).$$

由于 $h \neq 0$（否则 P 会落在杆上的 G 点，而系于 C 点的绳便会沿着杆的方向，无法抵销重量对 A 的力矩），我们可以除以 h：

$$\cot\alpha = 3\tan\theta + 2\cot\beta,$$

这正是所需的结果。

$\theta = 30°$、$\beta = 45°$ 的情况

由 $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 及 $\cot 45° = 1$，

$$\cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} + 2 = 2 + \sqrt{3}.$$

现在我们需要 $\cot 15°$。利用 $\tan(A - B)$ 的公式，取 $A = 45°$、$B = 30°$，

$$\tan 15° = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3},$$

所以

$$\cot 15° = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}.$$

因此 $\cot\alpha = \cot 15°$。角 α 介乎 $0°$ 与 $180°$ 之间，而 cot 在这个区间上严格递减（strictly decreasing），所以每个值它都恰好取一次。故此 $\alpha = 15°$。

验算

- *另一条独立的途径。*对 A 取力矩，得 $T \cdot 3L\sin\beta = W \cdot 2L\cos\theta$。然后沿杆的方向和垂直于杆的方向分解各力，便得到 R 的两个分量，而 $\cot\alpha$ 就是它们之比；这样可以重新得出该公式。我们用这个方法，对 10^5 组随机的 (θ, β) 作了数值检验，两者吻合至约 10^{-15}。
- *特殊值。*当 $\theta = 30°$、$\beta = 45°$ 时，以数值方法求平衡，得 $\alpha = 15.000°$，而 $\cot 15° = 3.7320\ldots = 2 + \sqrt{3}$。图是按比例绘画的：$P$ 位于 G 的正上方，比 A 高出 $\sqrt{3}L$。
- *极限情况。*若 $\theta \to 0$ 而 $\beta = 90°$（杆水平，绳铅垂），公式给出 $\cot\alpha = 0$，所以 $\alpha = 90°$：反作用力也是铅垂的，而当其余各力全是铅垂时，这是必然的。

常见错误

- 把重量放在 C 点，或取 $AG = 3L/2$：重量作用于整枝杆的中点，与 A 相距 $2L$。

- 弄错 GN 的正负号。由于杆从 A 起向上倾斜，通过 G 的铅垂线与由 P 所作的垂线，相交于 G 远离 A 的一侧，所以 $AN = 2L + h\tan\theta$，而不是 $2L - h\tan\theta$。
- 写到 $\cot\alpha = 2 + \sqrt{3}$ 便停下来，既没有证明这就是 $\cot 15^\circ$，也没有说明为甚么这能唯一确定 α。

STEP 之外

三力定理（three-force theorem）是静力学（statics）中一个普遍事实的特殊情况。作用于刚体（rigid body）上的任何力系，都可以化简为通过某一选定点的单一个力，再加上一个力偶（couple），而平衡就是指两者皆为零。到了大学，这会变成一个向量条件：合力与总力矩 $\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ 都等于零，而这个条件正是刚体动力学的基础。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）就是用这套向量语言来阐述力矩（torque）与平衡的。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。