详细解答

STEP II 2010，第 10 题

力学 · 弹性碰撞

> **STEP II 2010，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q10

本题在 *Beyond STEP* 第 10.2 节叠球效应中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/stacked-balls.html

关键思路

一切都建基于一次碰撞：一粒质点以完全弹性的方式撞向另一粒静止的质点。动量守恒（conservation of momentum）加上牛顿实验定律（Newton's experimental law，取 $e = 1$）便可求出传递出去的速率，而这个速率只取决于两个质量之比。在第 (ii) 部分，每次碰撞的质量比都是 λ，所以每次碰撞都把速率乘以同一个因子，余下的工作交给等比数列（geometric progression）就可以了。

解答

把各质点视为点质量，在光滑桌面上沿一条直线运动，所有速度均以 B 的初始运动方向为正方向量度。

第 (i) 部分

设 B 和 A 在紧接碰撞之后的速度分别为 v_B 和 v_A。由动量守恒得

$$bmu = bm\,v_B + m\,v_A,$$

又因为碰撞是完全弹性（perfectly elastic）的（$e = 1$），按牛顿实验定律，分离速率等于接近速率：

$$v_A - v_B = u.$$

把 $v_B = v_A - u$ 代入动量方程，并约去 m，

$$bu = b(v_A - u) + v_A \quad \Longrightarrow \quad v_A = \frac{2bu}{b+1}.$$

所以 A 的速率是 $\dfrac{2b}{b+1}\,u$。

这条公式只用到质量比 b，而且推导对任何 $b > 0$ 都成立。由于 $b+1 > b$ 且 $u > 0$，

$$v_A = 2u \cdot \frac{b}{b+1} < 2u,$$

不论 b 取甚么值都是如此。所以 A 永远不可能以 B 初始速率的两倍运动；不过只要把 b 取得够大，它的速率可以任意接近 $2u$。

第 (ii) 部分

沿直线依次排列的质量为

$$B_1 : \lambda^n m, \quad B_2 : \lambda^{n-1} m, \quad \ldots, \quad B_n : \lambda m, \quad A : m.$$

每粒质点的质量都是下一粒的 λ 倍。所以每当一粒以速率 v 运动的质点撞上下一粒（静止的）质点，第 (i) 部分的结果便适用，其中 $b = \lambda$，而被撞的质点会以速率 kv 离开，其中

$$k = \frac{2\lambda}{\lambda+1}.$$

由第 (i) 部分的方程 $v_B = v_A - u$ 可知，撞击的质点会继续向前运动，速率为

$$kv - v = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\, v,$$

由于 $\lambda > 1$，这个值是正数。

于是 B_1 令 B_2 得到速率 ku，然后 B_2 令 B_3 得到速率 k^2u，如此类推，直至以 $k^{n-1}u$ 运动的 B_n 令 A 得到速率

$$v_A = k^n u = \left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)^n u.$$

? **想一想** 会不会有额外的碰撞，即某个 B_i 把速率传递出去之后，又追上前面的那一粒？

全部 n 次碰撞之后，B_i 以速率 $\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}k^{i-1}u$ 向前运动，其中 $i = 1, \ldots, n$，而 A 则以速率 $k^n u$ 运动。由于 $\lambda > 1$，我们有 $k > 1$（因为 $2\lambda > \lambda + 1$），所以这些速率沿着直线严格递增：每粒质点都比它后面的那一粒快，彼此愈离愈远。因此不会再有碰撞，A 的最终速率就是 $k^n u$。

因为 $k > 1$，当 $n \to \infty$ 时 $k^n \to \infty$。所以对任何目标速率 V，只要把 n 取得够大，使 $k^n u > V$，便可令 A 的速率超过 V：A 的速率没有上限。

$\lambda = 4$ 的情况

这时 $k = \frac{8}{5}$，我们要找出满足 $\left(\frac{8}{5}\right)^n > 20$ 的最小 n。取以 10 为底的对数（logarithm；这是递增函数，所以不等式的方向不变），

$$n \log_{10} \tfrac{8}{5} > \log_{10} 20.$$

写成 $\frac{8}{5} = \frac{2^4}{10}$ 和 $20 = 2 \times 10$，

$$\log_{10} \tfrac{8}{5} = 4 \log_{10} 2 - 1 \approx 0.20412,$$
$$\log_{10} 20 = \log_{10} 2 + 1 \approx 1.30103.$$

由于 $\log_{10} \frac{8}{5} > 0$，我们可以把两边同除以它，得

$$n > \frac{1.30103}{0.20412} \approx 6.37.$$

满足此条件的最小整数是 $n = 7$。（这里的余裕相当充足：6.37 离整数很远，所以 $\log_{10} 2$ 的近似值不会影响答案。）

验算

- 在第 (i) 部分，$b = 1$ 给出 $v_A = u$ 和 $v_B = 0$：质量相等的质点互换速度，正该如此。当 $b \to \infty$ 时，$v_A \to 2u$。
- 动能（kinetic energy）：以 $v_A = \frac{2b}{b+1}u$ 和 $v_B = \frac{b-1}{b+1}u$ 代入，得 $bv_B^2 + v_A^2 = \frac{b(b-1)^2 + 4b^2}{(b+1)^2}u^2 = bu^2$，所以能量守恒。
- 直接计算：$1.6^6 \approx 16.78 < 20$ 而 $1.6^7 \approx 26.84 > 20$，确认 $n = 7$。用精确分数逐步模拟整条质点链，同样得出 A 的速率在刚好 n 次碰撞之后恰为 $k^n u$。

常见错误

- 把质量的次序弄反：B_1 是最重的（$\lambda^n m$），B_n 是各个 B 之中最轻的（λm），而 A 比它还要轻。
- 把碰撞次数数成 $n - 1$ 次而不是 n 次：速率沿 $B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_n \to A$ 传递，共有 n 步。
- 忘记排除其后再发生碰撞的可能，或者答了非整数 6.37，而不是最小整数 $n = 7$。

STEP 之外

单独一次弹性碰撞最多只能把速率加倍，但一连串碰撞却没有这个限制。这正是“叠球”示范背后的原理：把一个轻球叠在重球上面一同放下，轻球反弹的高度会远远超过它落下的高度。利用动量和能量来分析碰撞（更简洁的做法是在质心参考系（centre-of-mass frame）中分析，在那里弹性碰撞只是把每个速度反转），是大学一年级力学的核心课题。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学导论）对此有深入的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。