详细解答

STEP II 2010，第 1 题

纯数学 · 曲率与密切圆

> **STEP II 2010，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q1

关键思路

“相切”（touches）的意思是圆与曲线共有点 P，而且在该点的斜率（gradient）相同；“斜率的变化率”就是 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。因此我们要找一个圆，使它在 P 点的 y、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 全部与曲线的相应数值一致。把一般圆的方程作两次隐函数微分（implicit differentiation），问题便化为关于圆心的简单方程。

解答

曲线在 P 点的情况

对于 $y = 1 - x + \tan x$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 + \sec^2 x = \tan^2 x, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2\tan x \sec^2 x.$$

当 $x = \frac{1}{4}\pi$ 时，$\tan x = 1$ 且 $\sec^2 x = 2$，所以

$$y = 2 - \tfrac{1}{4}\pi, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 4.$$

因此 $P = (\frac{1}{4}\pi,\ 2 - \frac{1}{4}\pi)$。

圆

设圆的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$。对 x 作隐函数微分，得

$$(x-a) + (y-b)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

再微分一次（对第二项使用积法则（product rule）），得

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+(y-b)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0.$$

想一想 为甚么可以把曲线的数值直接代入圆的方程?

这两条方程在圆上每一点都成立，其中 y、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ 是圆本身的数值。题目的两个条件是说：在 P 点，圆通过 P，而且斜率与 C 相同，二阶导数（second derivative）也相同。所以在 P 点我们可以取 $x=\frac{1}{4}\pi$、$y=2-\frac{1}{4}\pi$、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=1$ 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=4$。

由第二条方程得

$$1+1+4(y-b)=0 \quad\Longrightarrow\quad y-b=-\tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad b=2-\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\pi.$$

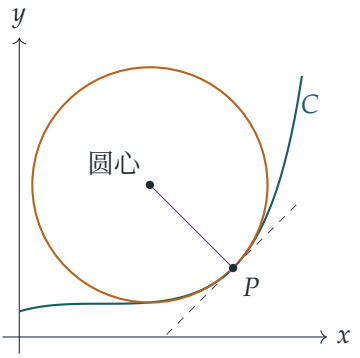
再由第一条方程得

$$x-a=-(y-b)\cdot 1=\tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad a=\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}.$$

最后，$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$。所以密切圆（osculating circle）的

$$\text{圆心为}\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\pi\right) \quad\text{，半径为}\quad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

从几何上看，这个结果是合理的。圆心与 P 相距 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，位于方向 $(-1,1)$ 上，而这个方向与斜率为 1 的切线（tangent）垂直。圆心位于 $y>2-\frac{1}{4}\pi$ 的一侧，即曲线的上方；这是对的，因为 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2>0$，曲线在该处向上凹（concave upwards）。



验算

- 一般的曲率半径（radius of curvature）公式 $\rho=\left(1+y'^2\right)^{3/2}/|y''|$ 给出 $2^{3/2}/4=1/\sqrt{2}$，与上面求得的结果一致。

- 以数值计算,圆心约为 $(0.2854,\ 1.7146)$,P 约为 $(0.7854,\ 1.2146)$;两点的距离为 0.70711。取圆的下半部分 $y = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$,在 $x = 0.7854$ 处作数值微分,得斜率 1.0000 和二阶导数 4.000,与曲线吻合。

常见错误

- 把圆心放在切线的错误一侧:$y - b$ 的正负号由第二条方程决定,所以让代数运算来判断就可以了。
- 忘记对 $(y-b)\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 微分时要用积法则,而 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2$ 这一项正是由此而来。

STEP 之外

密切圆的半径就是曲率半径,它的倒数 $\kappa = |y''|/(1+y'^2)^{3/2}$ 就是曲率(curvature),是曲线微分几何(differential geometry)中的核心量。对于空间曲线,曲率与挠率(torsion)一同出现在弗勒内–塞雷公式(Frenet–Serret formulae)中,这组公式描述曲线如何弯曲和扭转。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*(进阶数学难题集)收录了更多同类的 STEP 题目。

Beyond STEP 详细解答:https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0;题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有(©),本文件不予转载。由机器从英文翻译而成;尚未经审阅。