详细解答

STEP I 2010，第 9 题

力学 • 摩擦力与平衡

STEP I 2010，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s1-q9

关键思路

先把地面上的那个顶点放在一个已知位置，再沿两条互相垂直的边走到质心（centre of mass）：这样便得出质心与墙的距离。至于平衡（equilibrium），“两个接触点均处于极限状态”意味着每个摩擦力（friction）都等于 μ 乘以相应的法向反作用力（normal reaction），因此沿两个方向分解力（resolving）后，两个反作用力都可用重量表示。之后只需一条力矩（moment）方程便大功告成，而设 $\mu = \tan\lambda$ 则可把代数运算化为复角公式（compound-angle formulae）。

解答

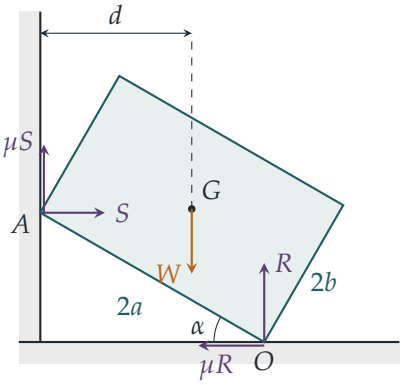
模型

薄片（lamina）是一块重量为 W 的均匀刚性长方形，所以它的质心 G 就是它的中心。设 O 为地面上的顶点，A 为靠墙的顶点，于是 OA 是一条长度为 $2a$ 的边，与地面成角 α，而由 O 出发、长度为 $2b$ 的边则向上并向远离墙的方向伸展。各力如下：

- 在 O 点：法向反作用力 R 向上，摩擦力 F 沿水平方向；
- 在 A 点：法向反作用力 S 沿水平方向指离墙壁，摩擦力 P 沿铅垂方向；
- 重量 W 作用于 G，方向向下。

薄片正处于即将滑动的状态，O 会向远离墙的方向滑动，A 则会沿墙向下滑动，而摩擦力阻碍这些运动：F 指向墙壁，P 向上。由于两个接触点的摩擦力均达极限（limiting friction），

$$F = \mu R, \qquad P = \mu S.$$



质心与墙的距离

由于 OA 的长度为 $2a$，且与水平线成角 α，所以 O 与墙的水平距离为 $2a\cos\alpha$。

由 O 出发，沿 O 点的两条边各走一半，便到达 G。沿 OA（向墙的方向）走 a，我们便向墙移近了 $a\cos\alpha$。长度为 $2b$ 的边与 OA 垂直，所以它与水平线成角 $\frac{1}{2}\pi-\alpha$，并向远离墙的方向倾斜；沿它走 b，我们便远离墙壁 $b\cos(\frac{1}{2}\pi-\alpha)=b\sin\alpha$。因此 G 与墙的距离为

$$d=2a\cos\alpha-a\cos\alpha+b\sin\alpha=a\cos\alpha+b\sin\alpha,$$

正如所求。同理，G 在地面之上的高度为 $a\sin\alpha+b\cos\alpha$，而 A 在地面之上的高度为 $2a\sin\alpha$。

平衡条件

沿水平和铅垂方向分解力，

$$S=\mu R,$$
$$R+\mu S=W.$$

把第一式代入第二式，得 $R(1+\mu^2)=W$，所以

$$R=\frac{W}{1+\mu^2},\qquad S=\frac{\mu W}{1+\mu^2}.$$

现在对 O 取力矩，这样便消去了 R 和 μR。在水平方向上，G 比 O 更接近墙壁 $2a\cos\alpha-d=a\cos\alpha-b\sin\alpha$，所以重量的力矩为 $W(a\cos\alpha-b\sin\alpha)$，倾向使薄片朝墙的方向转动。在 A 点，力 S 的作用线位于 O 之上 $2a\sin\alpha$ 的高度，而 μS 沿墙作用，与 O 的水平距离为 $2a\cos\alpha$；两者都倾向使薄片朝远离墙的方向转动。所以

$$W(a\cos\alpha-b\sin\alpha)=S\cdot 2a\sin\alpha+\mu S\cdot 2a\cos\alpha=\frac{2a\mu W(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{1+\mu^2}.\qquad(*)$$

想一想 设 $\mu = \tan\lambda$ 如何把右边化简?

设 $\mu = \tan\lambda$，则 $1 + \mu^2 = \sec^2\lambda$，所以

$$\frac{\mu}{1+\mu^2} = \tan\lambda\cos^2\lambda = \sin\lambda\cos\lambda,$$
$$\sin\alpha + \mu\cos\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda}{\cos\lambda} = \frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda}.$$

因此 $(*)$ 的右边是 $2aW\sin\lambda\sin(\alpha+\lambda)$。约去 W，并利用 $2\sin P\sin Q = \cos(P-Q) - \cos(P+Q)$，其中 $P = \alpha+\lambda$，$Q = \lambda$，

$$\begin{aligned} b\sin\alpha &= a\cos\alpha - 2a\sin\lambda\sin(\alpha+\lambda) \\ &= a\cos\alpha - a\big(\cos\alpha - \cos(\alpha+2\lambda)\big) \\ &= a\cos(2\lambda+\alpha), \end{aligned}$$

这就是所求的结果。

正方形薄片

若薄片是正方形，则 $b = a$，两边除以 $a \neq 0$，

$$\cos(2\lambda+\alpha) = \sin\alpha = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\right).$$

所以对某个整数 k，有 $2\lambda+\alpha = \pm\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) + 2k\pi$。我们需要选出正确的分支。这里 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$（薄片是倾斜的），而且由于 $\mu > 0$，有 $0 < \lambda < \frac{1}{2}\pi$，所以 $0 < 2\lambda+\alpha < \frac{3}{2}\pi$。

- 取 $+$ 号得 $2\lambda+\alpha = \frac{1}{2}\pi - \alpha + 2k\pi$；只有 $k = 0$ 落在 $(0, \frac{3}{2}\pi)$ 之内（因为 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ 位于 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之内），由此得 $\lambda = \frac{1}{4}\pi - \alpha$。
- 取 $-$ 号得 $2\lambda = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$，即 $\lambda = -\frac{1}{4}\pi + k\pi$，而这样的值没有一个位于 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之内。

因此 $\lambda = \frac{1}{4}\pi - \alpha$，正如所求。（特别地，这种极限平衡需要 $\alpha < \frac{1}{4}\pi$，这与 G 必须位于 O 靠墙一侧的要求吻合：$a\cos\alpha > a\sin\alpha$。）

验算

- 若 $\mu = 0$（$\lambda = 0$），条件变为 $a\cos\alpha = b\sin\alpha$：$G$ 在 O 的正上方，这正是薄片无需墙壁帮助、仅靠顶点便能平衡的情况。
- 对于 $\alpha = 15^\circ$ 的正方形，结果给出 $\lambda = 30^\circ$，所以 $\mu = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$。把 $a = b = 1$、$\alpha = \frac{\pi}{12}$、$\mu = 1/\sqrt{3}$ 代入 $(*)$，两边都等于 $W(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ) \approx 0.707W$。

- 在数值方面，我们随机选取了 2000 组长方形和角度，以二分法（bisection）从力和力矩方程求出 μ，并确认 $a\cos(2\lambda+\alpha)=b\sin\alpha$ 成立，误差在 10^{-14} 以内。

常见错误

- 弄错摩擦力的方向：应先判断每个接触点会向哪个方向滑动，然后取相反的方向。
- 把与墙的距离 $a\cos\alpha+b\sin\alpha$ 当作对 O 的力臂（moment arm）；对 O 的力臂其实是 $a\cos\alpha-b\sin\alpha$。
- 忘记了 $\lambda=\frac{3}{4}\pi$ 也是该三角方程的解；它之所以被排除，是因为 $\mu>0$ 使得 $0<\lambda<\frac{1}{2}\pi$。

STEP 之外

满足 $\tan\lambda=\mu$ 的角 λ 称为摩擦角（angle of friction）：在极限摩擦时，总接触力与法线成角 λ。另有一个巧妙的方法，利用的是以下事实：刚体（rigid body）在三个力作用下平衡，这三个力必须共点（concurrent）：两个总接触力与重量必须交于一点，于是问题便化为纯粹的几何问题。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）在讲述牛顿力学其他内容的同时，也阐述了刚体静力学和摩擦。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。