详细解答

STEP I 2010，第 8 题

纯数学 · 无穷递降法

> **STEP I 2010，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q8

关键思路

两部分用的是同一个技巧，称为*无穷递降法*（infinite descent）。首先考虑方程模（modulo）某个质数（prime）的情况（第 (i) 部分取 3，第 (ii) 部分取 5），会发现这个质数必定整除每一个未知数。把它除去之后，便得到*完全相同的方程*的一个更小的解，而一个非零整数不可能无止境地被 3（或 5）整除。真正要花工夫的，只是找出哪些余数（residue）可能出现，而在第 (ii) 部分，四次方（fourth power）的末位数字已替我们完成这一步。

解答

第 (i) 部分

移项整理，得

$$a^3 = 9c^3 - 3b^3 = 3(3c^3 - b^3),$$

所以 3 整除 a^3。由于 3 是质数，若它整除乘积 $a \cdot a \cdot a$，则它必整除其中一个因子，所以 $3 \mid a$。

设 $a = 3a_1$，其中 a_1 为整数。代入后除以 3：

$$27a_1^3 + 3b^3 = 9c^3 \quad \Longrightarrow \quad 9a_1^3 + b^3 = 3c^3,$$

所以 $b^3 = 3(c^3 - 3a_1^3)$ 可被 3 整除，同理可得 $3 \mid b$。设 $b = 3b_1$；则

$$9a_1^3 + 27b_1^3 = 3c^3 \quad \Longrightarrow \quad c^3 = 3(a_1^3 + 3b_1^3),$$

所以亦有 $3 \mid c$。这证明了 a、b 和 c 全都可被 3 整除。

现在再设 $c = 3c_1$。最后一条方程变成 $27c_1^3 = 3a_1^3 + 9b_1^3$，即

$$a_1^3 + 3b_1^3 = 9c_1^3.$$

? **想一想** 我们已证明 3 整除所有未知数。为甚么这样就迫使它们全部等于零?

因为 $(a_1, b_1, c_1) = (a/3,\, b/3,\, c/3)$ 同样是原来方程的一个整数解，所以刚才证明的一切对它同样适用：a_1、b_1、c_1 可被 3 整除，即 a、b、c 可被 9 整除。把这个论证重复 k 次，可知对每个 $k \geq 1$，3^k 都整除 a、b 和 c 各数。但一旦 $3^k > |n|$，非零整数 n 便不能被 3^k 整除。因此 $a = b = c = 0$，而这显然是一个解，所以它是唯一的解。

（等价的说法：假如存在 $(0,0,0)$ 以外的解，从中选取 $|a| + |b| + |c|$ 为正数而又尽可能小的一个；那么 $(a/3, b/3, c/3)$ 也是一个解，而且对应的正数值更小，矛盾。）

第 (ii) 部分

由于 $p^4 = |p|^4$，p^4 的末位数字只取决于 $|p|$ 的末位数字：

n 的末位数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^4 的末位数字	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

（例如 $2^4 = 16$、$3^4 = 81$、$7^4 = 2401$。）所以四次方的末位数字是 0、1、5 或 6，而且末位是 0 或 5 当且仅当 $5 \mid n$。

现在逐项看末位数字。

- $5r^4$ 是 5 的倍数，所以末位是 0 或 5。
- $2q^4$ 的末位是 0（若 q^4 的末位是 0 或 5）或 2（若 q^4 的末位是 1 或 6）。
- p^4 的末位是 0、1、5 或 6。

把 $\{0,1,5,6\}$ 中的一个末位数字与 $\{0,2\}$ 中的一个相加，结果的末位是 $0,1,5,6,2,3,7,8$ 其中之一。要得到 0 或 5，只有 $0+0$ 和 $5+0$ 两种方式。所以 $2q^4$ 的末位是 0，也就是说 q^4 的末位是 0 或 5，即 $5 \mid q$；而 p^4 的末位是 0 或 5，即 $5 \mid p$。这证明了 p 和 q 可被 5 整除。

（另一做法：根据费马小定理（Fermat's little theorem），当 $5 \nmid n$ 时 $n^4 \equiv 1 \pmod 5$，所以 $p^4 + 2q^4$ 模 5 同余（congruent）于 $0+0$、$1+0$、$0+2$ 或 $1+2$，当中只有第一个是 0。）

设 $p = 5p_1$ 及 $q = 5q_1$。则

$$625\left(p_1^4 + 2q_1^4\right) = 5r^4 \quad \Longrightarrow \quad r^4 = 125\left(p_1^4 + 2q_1^4\right),$$

所以 $5 \mid r^4$，又因为 5 是质数，故 $5 \mid r$。设 $r = 5r_1$，得

$$625r_1^4 = 125\left(p_1^4 + 2q_1^4\right) \quad \Longrightarrow \quad p_1^4 + 2q_1^4 = 5r_1^4.$$

所以 $(p/5, q/5, r/5)$ 同样是同一方程的整数解。

与第 (i) 部分完全一样，重复这个步骤可知对每个 k，5^k 都整除 p、q 和 r 各数，而这对非零整数来说是不可能的。因此唯一的整数解是 $p = q = r = 0$。

验算

用电脑搜索，在 $|a|, |b|, |c| \leq 60$ 的范围内，$a^3 + 3b^3 = 9c^3$ 除 $(0,0,0)$ 外没有其他解；在 $|p|, |q|, |r| \leq 150$ 的范围内，$p^4 + 2q^4 = 5r^4$ 亦然。逐一检查 p 和 q 末位数字的全部 100 种组合，可确认只有当两个末位数字都是 0 或 5 时，$p^4 + 2q^4$ 的末位才是 0 或 5。再用手算快速核对一下：取 $p = q = 1$，得 $p^4 + 2q^4 = 3$，不是 5 的倍数，与上表所示一致。

常见错误

- 证明了 3（或 5）整除每个未知数之后便停下来。单凭这一点并不能得出零；关键在于除去该因数后，得到的是同一条方程的解，所以论证可以重复下去。
- 由“$3 \mid a^3$”推出“$3 \mid a$”而不说明理由。这一步成立是因为 3 是质数；换成例如由 $9 \mid a^3$ 推出 $9 \mid a$ 就不成立（试试 $a = 3$）。
- 列出末位数字时忘记了负整数。四次方是偶数次幂，所以 $p^4 = |p|^4$，上表已涵盖所有情况。

STEP 之外

无穷递降法可追溯至费马（Fermat），他用这个方法证明了 $x^4 + y^4 = z^2$ 没有正整数解（从而证明了费马最后定理（Fermat's Last Theorem）中 $n = 4$ 的情况）。这里用到的想法是：如果一条方程模某个质数的幂没有非平凡（non-trivial）解，它就不可能有非平凡的整数解；这个想法进一步发展，便成为 p 进数（p-adic numbers）和哈塞原理（Hasse principle）的研究。达文波特（Davenport）的 *The Higher Arithmetic* 是一本介绍同余与递降法的优美入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。