详细解答

STEP I 2010，第 7 题

纯数学 · 向量与相交直线

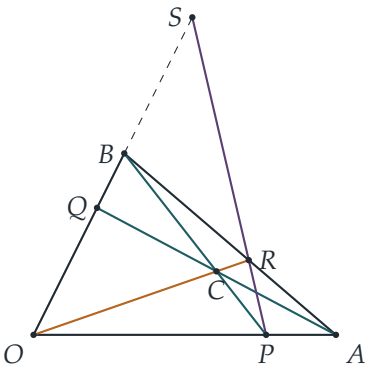
STEP I 2010，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s1-q7

关键思路

由于 O、A 和 B 不共线（collinear），平面上每一点都可以写成 $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ 的形式，而且写法唯一。因此，要找出两条直线的交点，我们可以把每条直线上的一般点写成这个形式，然后比较 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的系数（coefficient）。一点位于直线 OB 上，当且仅当它的 $\mathbf{a}$ 系数为零；位于 AB 上，则当且仅当它的两个系数之和为 1。这两个事实几乎包办了全部工作。



图中取 $\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{7}{20}$。留意 S 位于直线 OB 上，但在线段（segment）OB 之外，而 Q 则位于 O 与 B 之间。

解答

求 p 和 q

直线 BC 上的一般点为

$$\mathbf{b}+\mu(\mathbf{c}-\mathbf{b})=\mu\alpha\,\mathbf{a}+(1-\mu(1-\beta))\mathbf{b}.$$

直线 OA 上的点具有 $\lambda\mathbf{a}$ 的形式，没有 $\mathbf{b}$ 分量。由于 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不平行（因为 O、A、B 不共线），我们可以比较系数。$\mathbf{b}$ 的系数必须为零，所以 $\mu=\dfrac{1}{1-\beta}$；这样做是可以的，因为 $\beta<1-\alpha<1$，所以 $1-\beta\neq 0$。于是

$$\mathbf{p}=\mu\alpha\,\mathbf{a}=\frac{\alpha\mathbf{a}}{1-\beta},$$

正如所求。

整个设置在对调 $A\leftrightarrow B$ 及 $\alpha\leftrightarrow\beta$ 之下是对称的（这同时对调了 $P\leftrightarrow Q$），所以我们可以直接写出

$$\mathbf{q}=\frac{\beta\mathbf{b}}{1-\alpha}.$$

点 R

首先，$\mathbf{r}=\dfrac{1}{\alpha+\beta}\,\mathbf{c}$ 是 $\mathbf{c}$ 的纯量倍数（scalar multiple），所以 R 位于直线 OC 上。

其次，把它写成 $\mathbf{r}=t\mathbf{a}+(1-t)\mathbf{b}$，其中 $t=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$。事实上 $1-t=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$，这正是 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{r}$ 中的系数。形如 $t\mathbf{a}+(1-t)\mathbf{b}=\mathbf{b}+t(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ 的点恰好就是直线 AB 上的点，所以 R 也位于 AB 上。

点 S

直线 PR 上的一般点为 $\mathbf{p}+t(\mathbf{r}-\mathbf{p})$，它等于

$$\left[\frac{\alpha}{1-\beta}+t\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-\frac{\alpha}{1-\beta}\right)\right]\mathbf{a}\;+\;\frac{t\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b}.$$

要使这一点位于 OB 上，$\mathbf{a}$ 的系数必须为零。两边除以 $\alpha\neq 0$，得

$$\frac{1}{1-\beta}=t\cdot\frac{(\alpha+\beta)-(1-\beta)}{(1-\beta)(\alpha+\beta)},\qquad\text{所以}\qquad t=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta-1}.$$

（题目告诉我们这两条直线相交，这就迫使 $\alpha+2\beta\neq 1$。若 $\alpha+2\beta=1$，则 PR 与 OB 平行。）因此

$$\mathbf{s}=\frac{t\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b}=\frac{\beta}{\alpha+2\beta-1}\,\mathbf{b}.$$

想一想 怎样由位置向量（position vector）$k\mathbf{b}$ 得出该点与 O 的距离和与 B 的距离之比?

若 X 的位置向量为 $k\mathbf{b}$，则 $\overrightarrow{OX} = k\mathbf{b}$ 而 $\overrightarrow{BX} = (k-1)\mathbf{b}$，所以

$$\frac{OX}{BX} = \frac{|k|}{|1-k|}.$$

这里的绝对值（absolute value）很重要，因为 k 可以是负数，也可以大于 1，图中的 S 正是如此。

两个比

对于 Q, 我们有 $k = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$, 而且 $0 < k < 1$, 因为 $0 < \beta < 1-\alpha$。于是 $1-k = \dfrac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}$, 所以

$$\frac{OQ}{BQ} = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}.$$

对于 S，我们有 $k = \dfrac{\beta}{\alpha+2\beta-1}$，所以

$$1-k = \frac{\alpha+2\beta-1-\beta}{\alpha+2\beta-1} = \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+2\beta-1}, \qquad \frac{k}{1-k} = \frac{\beta}{\alpha+\beta-1} = -\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}.$$

取绝对值，并利用 $\beta > 0$ 和 $1-\alpha-\beta > 0$，得

$$\frac{OS}{BS} = \left|\frac{k}{1-k}\right| = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} = \frac{OQ}{BQ}.$$

证明至此完成。取绝对值之前的那个负号说明：Q 内分（divides internally）OB，而 S 则外分（divides externally）它，两者的比相同。

验算

- 试取 $\alpha = \frac{1}{2}$，$\beta = \frac{7}{20}$（即图中的情况）。这时 $\mathbf{q} = 0.7\mathbf{b}$ 而 $\mathbf{s} = 1.75\mathbf{b}$，所以 $OQ/BQ = 0.7/0.3 = \frac{7}{3}$ 及 $OS/BS = 1.75/0.75 = \frac{7}{3}$。公式给出 $\beta/(1-\alpha-\beta) = 0.35/0.15 = \frac{7}{3}$。
- 我们随机选取 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、α、β，直接解成对的直线方程以计算全部四个交点，再与公式比较，并检查两个比是否相等。在超过 8000 个个案中，结果全部吻合。
- 对称性：对调 $\alpha \leftrightarrow \beta$ 及 $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{b}$，会把 $\mathbf{p}$ 的公式变成 $\mathbf{q}$ 的公式，正该如此。

常见错误

- 忘记取绝对值。$\mathbf{s}$ 的系数可以是负数，也可以大于 1，这时不小心直接用 $k/(1-k)$，便会得出一个负的“长度之比”。

- 比较 **a** 和 **b** 的系数，却没有说明为甚么可以这样做。这个做法之所以成立，是因为 **a** 与 **b** 不平行。

STEP 之外

点 Q 和 S 以相同的比内分和外分 OB，所以它们是关于 O 和 B 的调和共轭（*harmonic conjugates*）。这里的图形，即四条直线连同它们的交点，就是经典的完全四边形（*complete quadrilateral*）。调和分割（harmonic division）在投影（projection）之下保持不变，是射影几何（projective geometry）的核心概念之一。把点用两个独立向量表示，再比较系数，这个习惯正是线性代数（linear algebra）的起点；在线性代数中，它发展成为基（basis）的概念。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教材）阐述了这方面的内容。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。