详细解答

STEP I 2010，第 6 题

纯数学 · 降阶法

STEP I 2010，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s1-q6

关键思路

只要知道二阶线性微分方程（linear second-order equation）的一个解，把通解（general solution）写成这个已知解乘以一个未知函数 u，所有只含 u 本身（不带导数）的项便会互相抵消。余下的只涉及 u' 和 u''，所以它其实是关于 $v = u'$ 的一阶方程，而且这个方程是可分离变量（separable）的。这种技巧称为*降阶法*（reduction of order）。

解答

验证 $y = \mathrm{e}^x$ 是解

若 $y = \mathrm{e}^x$，则 $y' = y'' = \mathrm{e}^x$，所以

$$(x-1)\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = (x - 1 - x + 1)\mathrm{e}^x = 0,$$

因此 $y = \mathrm{e}^x$ 满足 $(*)$。

关于 u 的方程

设 $y = u\mathrm{e}^x$。由积法则（product rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= (u' + u)\,\mathrm{e}^x,\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= (u'' + u')\,\mathrm{e}^x + (u' + u)\,\mathrm{e}^x = (u'' + 2u' + u)\,\mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

代入 $(*)$ 的左方，并抽出因子 e^x：

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^x[(x-1)(u''+2u'+u)-x(u'+u)+u]\\&\quad=\mathrm{e}^x[(x-1)u''+(2x-2-x)u'+(x-1-x+1)u]\\&\quad=\mathrm{e}^x[(x-1)u''+(x-2)u'].\end{aligned}$$

含 u 的项互相抵消，情况与我们验证 $y=\mathrm{e}^x$ 时完全一样（那次验证正是 $u=1$ 的情形）。由于 e^x 永不为零，$y=u\mathrm{e}^x$ 满足 $(*)$ 当且仅当

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+(x-2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0,$$

这就是 $(**)$，正如题目所求。

先解 v，再解 u

设 $v=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，$(**)$ 便化为一阶方程

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-(x-2)\,v.$$

其中一个解是 $v=0$。除此之外，在 $x\neq1$ 且 $v\neq0$ 的区间上，我们可以分离变量：

$$\int\frac{1}{v}\,\mathrm{d}v=-\int\frac{x-2}{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

? **想一想** 怎样求 $\dfrac{x-2}{x-1}$ 的积分?

把分子用分母表示：$x-2=(x-1)-1$，所以

$$\frac{x-2}{x-1}=1-\frac{1}{x-1}.$$

因此

$$\ln|v|=-x+\ln|x-1|+c,\qquad\text{所以}\qquad v=C(x-1)\mathrm{e}^{-x},$$

其中 $C=\pm\mathrm{e}^c$。若容许 $C=0$, 便连 $v=0$ 这个解也包括在内, 所以 $v=C(x-1)\mathrm{e}^{-x}$, 其中 C 为任意常数。(不难直接验证,这个解对所有 x(包括 $x=1$)都满足 $(x-1)v'+(x-2)v=0$。)

现在求积分以得出 u。运用分部积分法（integration by parts），对 $(x-1)$ 求导、对 e^{-x} 求积分，

$$\begin{aligned}\int(x-1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x&=-(x-1)\mathrm{e}^{-x}+\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=-(x-1)\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}=-x\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

所以 $u = -Cx\mathrm{e}^{-x} + B$。把 $-C$ 改记为 A，

$$u = Ax\mathrm{e}^{-x} + B,$$

其中 A 和 B 为任意常数。

最后部分

上文已证明，只要 u 满足 $(**)$，$y = u\mathrm{e}^{x}$ 便满足 $(*)$。我们求得的 $u = Ax\mathrm{e}^{-x} + B$ 满足 $(**)$，因为它的导数是 $v = -A(x-1)\mathrm{e}^{-x}$，而这正是关于 v 的方程的解。因此，对任意常数 A 和 B，

$$y = u\mathrm{e}^{x} = (Ax\mathrm{e}^{-x} + B)\mathrm{e}^{x} = Ax + B\mathrm{e}^{x}$$

都满足 $(*)$，正如题目所求。

验算

直接验证 $y = x$：$y' = 1$，$y'' = 0$，所以 $(*)$ 的左方是 $0 - x + x = 0$。由于 $(*)$ 是线性的，x 和 e^{x} 这两个解的任何组合 $Ax + B\mathrm{e}^{x}$ 同样是解。再作一次数值验算：取 $A = 2$、$B = -1$ 及 $x = 0.5$，则 $y = 1 - \mathrm{e}^{0.5} \approx -0.64872$，$y' = 2 - \mathrm{e}^{0.5} \approx 0.35128$，$y'' = -\mathrm{e}^{0.5} \approx -1.64872$，得出 $(-0.5)(-1.64872) - 0.5(0.35128) - 0.64872 = 0.82436 - 0.17564 - 0.64872 = 0$。

常见错误

- 忘记积法则在 y'' 中给出的是 $2u'$（而不是 u'）。
- 没有先分拆出 1，便直接把 $\frac{x-2}{x-1}$ 当作对数来积分。
- 对 v 求积分以得出 u 时漏掉常数。正是这个常数 B 把原来的解 e^{x} 带回来。

STEP 之外

降阶法适用于任何线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$：若 y_1 是其中一个解，代入 $y = uy_1$ 总会得出一个关于 u' 的一阶方程。配合关于朗斯基行列式（Wronskian）的阿贝尔（Abel）公式，可以证明所有解构成一个二维向量空间（vector space），所以在每个不包含奇点（singular point）$x = 1$ 的区间上，$Ax + B\mathrm{e}^{x}$ 其实就是本题的通解。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（一本常微分方程入门教科书）对这两个概念都有讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。