详细解答

STEP I 2010，第 5 题

纯数学 · 二项式系数恒等式

STEP I 2010，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s1-q5

关键思路

这些和式每一个都是 $(1+x)^n$ 的二项展开式（binomial expansion）的化身：先对展开式做一些处理，再代入 $x=1$。$\binom{n}{k}$ 前面的因子 k，正是对 x^k 求导（differentiate）所产生的；因子 $\frac{1}{k+1}$，则是对 x^k 积分（integrate）所产生的。因此我们对恒等式（identity）

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

求导或积分，然后代入 $x=1$。至于 k^2，我们需要求导两次，并在两次之间乘以 x。

解答

以下 n 一直是正整数，而

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n \qquad (*)$$

对所有实数 x 均成立。由于等式两边都是多项式（polynomial），我们可以逐项求导或逐项积分，而恒等式依然成立。

第 (i) 部分

在 $(*)$ 中代入 $x=1$。左边是 2^n，而每个 x^k 都变成 1，所以

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

这正是所要证明的结果。

第 (ii) 部分

把 $(*)$ 对 x 求导。常数项消失，而 $\binom{n}{k}x^k$ 变成 $k\binom{n}{k}x^{k-1}$：

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}. \qquad (**)$$

代入 $x = 1$ 得

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\,2^{n-1},$$

这正是所要证明的结果。

第 (iii) 部分

这次我们想要的是 $\binom{n}{k}$ 除以 $k+1$，而这正好可以由 $\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}$ 得到。把 $(*)$ 由 0 积分至 1，左边是

$$\int_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1},$$

而右边是

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

因此

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right),$$

这正是所要证明的结果。留意积分下限十分重要：正因为由 0 开始积分，才会出现那个 -1。

第 (iv) 部分

> **想一想** 如果我们只是把 $(**)$ 再求导一次，得到的系数会是 $k(k-1)$，而不是 k^2。怎样才能得到 k^2 呢?

在第二次求导之前，先把 $(**)$ 乘以 x。这样 $k\binom{n}{k}$ 旁边的幂便还原为 x^k，于是下一次求导带下来的因子恰好又是 k：

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k.$$

求导，左边使用积法则（product rule），得

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

（当 $n=1$ 时，左边第二项含有因子 $n-1=0$，所以这一项根本不存在；恒等式仍然成立。）现在代入 $x=1$：

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{3}+\cdots+n^2\binom{n}{n} &= n\,2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}\\ &= n\,2^{n-2}(2+(n-1))\\ &= n(n+1)2^{n-2},\end{aligned}$$

这正是所要证明的结果。

另一个做法是写成 $k^2=k(k-1)+k$。把 $(*)$ 求导两次再代入 $x=1$，得 $\sum k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)2^{n-2}$，再加上第 (ii) 部分的结果，便得到相同的答案。

验算

取 $n=3$，此时各系数为 $1,3,3,1$。

- (i) $1+3+3+1=8=2^3$。
- (ii) $3+6+3=12=3\cdot 2^2$。
- (iii) $1+\frac{3}{2}+1+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}=\frac{1}{4}(2^4-1)$。
- (iv) $3+12+9=24=3\cdot 4\cdot 2$。

我们亦已用分数作精确计算，对由 1 至 40 的每一个 n 验证了全部四个恒等式。

常见错误

- 在 (iii) 中，忘记了积分下限的贡献，得出 $\frac{2^{n+1}}{n+1}$。
- 在 (iv) 中，直接对 $(**)$ 求导，得到的是 $\sum k(k-1)\binom{n}{k}$，而不是 $\sum k^2\binom{n}{k}$。

STEP 之外

这些恒等式都有概率上的意义。设 X 为掷一枚公平硬币 n 次所得正面的次数，则 $\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}/2^n$，所以第 (ii) 部分说明 $\mathrm{E}(X)=\frac{n}{2}$，第 (iv) 部分说明 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{n(n+1)}{4}$，由此得 $\mathrm{Var}(X)=\frac{n}{4}$。对母函数（generating function）求导以求出矩（moments），是大学一年级的标准技巧。Grimmett and Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入门教科书）对此有完整的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。