详细解答

STEP I 2010，第 4 题

纯数学 · 代换积分法

STEP I 2010，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s1-q4

关键思路

这个代换（substitution）的用意，是令 x 和 $x+1$ 同时变成分母同为 t^2-1 的简单分数，于是两者乘积的平方根可以准确地开出来。积分随即化为附注中的标准积分。至于体积，把 y 平方后会得到两个容易处理的对数项和一个交叉项（cross term），而这个交叉项正正就是我们刚求得的积分。

解答

积分

取 $x>0$。代换 $x=\dfrac{1}{t^2-1}$（其中 $t>1$）是合理的：解出 t 得

$$t=\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}},$$

而当 t 取遍 $(1,\infty)$ 时，x 取遍 $(0,\infty)$（递减地），每个 t 对应唯一一个 x 值。

现在

$$x+1=\frac{1}{t^2-1}+1=\frac{t^2}{t^2-1},\qquad \text{所以}\qquad x(x+1)=\frac{t^2}{(t^2-1)^2}.$$

由于 $t>1$，t 和 t^2-1 都是正数，所以

$$\sqrt{x(x+1)}=\frac{t}{t^2-1}.$$

? **想一想** 为甚么开平方根时需要 $t>1$?

平方根永不为负，所以 $\sqrt{t^2/(t^2-1)^2} = |t|/|t^2-1|$。条件 $t>1$ 让我们可以把两个绝对值（modulus）符号都去掉。这也解释了为何这样选取：$t^2-1>0$ 正是令 $x>0$ 的条件。求导，得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}$。因此

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^2-1}{t}\cdot\left(-\frac{2t}{(t^2-1)^2}\right)\mathrm{d}t = -2\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) + c,\end{aligned}$$

这里用了附注中 $a=1$ 的情况，以及 $t>1$ 令 $(t-1)/(t+1)$ 为正数这一事实。

现在利用 $t = \sqrt{x+1}/\sqrt{x}$ 换回 x。把分子和分母同乘以 $\sqrt{x}$，

$$\frac{t+1}{t-1} = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}{(x+1)-x} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2,$$

其中我们把分子和分母同乘以 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$，并用了平方差（difference of two squares）公式。故此

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x = 2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + c,$$

正如所求。

体积

当 $x>0$ 时，曲线上 $y>0$，因为由 $\sqrt{x}<\sqrt{x+1}$ 可得 $1/\sqrt{x}>1/\sqrt{x+1}$。所以曲线与 x 轴之间的区域旋转所扫出的体积是 $V = \pi\int y^2\,\mathrm{d}x$。展开后，

$$y^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x(x+1)}},$$

而最后一项是第一部分中被积函数（integrand）的两倍。所以

$$V = \pi\Big[\ln x + \ln(x+1)\Big]_{1/8}^{9/16} - 2\pi\Big[2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\Big]_{1/8}^{9/16}.$$

积分上下限是特意选取的，好让各个平方根都很整齐：

- 当 $x=\frac{9}{16}$：$\sqrt{x}=\frac{3}{4}$，$\sqrt{x+1}=\frac{5}{4}$，两者之和为 2，而 $x(x+1)=\frac{225}{256}$；
- 当 $x=\frac{1}{8}$：$\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，$\sqrt{x+1}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$，两者之和为 $\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，而 $x(x+1)=\frac{9}{64}$。

第一个方括号的值是

$$\ln\frac{225}{256} - \ln\frac{9}{64} = \ln\left(\frac{225}{256}\cdot\frac{64}{9}\right) = \ln\frac{25}{4},$$

而第二个是

$$2\ln 2 - 2\ln\sqrt{2} = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2.$$

因此

$$V = \pi \ln \frac{25}{4} - 2\pi \ln 2 = \pi \ln \frac{25}{4} - \pi \ln 4 = \pi \ln \frac{25}{16} = 2\pi \ln \frac{5}{4},$$

这正是我们要的结果。

验算

- 对答案求导：

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}},$$

  因为括号内等于 $\dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$。

- 数值上，用辛普森法则（Simpson's rule）可得 $\pi \int_{1/8}^{9/16} y^2 \,\mathrm{d}x \approx 1.402052$，与 $2\pi \ln \frac{5}{4} \approx 1.402052$ 吻合。辛普森法则亦印证了 $\int_{1/8}^{9/16} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}} = \ln 2 \approx 0.693147$。

常见错误

- 漏掉 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 中的负号。正是这个负号把 $\ln \frac{t-1}{t+1}$ 变成 $\ln \frac{t+1}{t-1}$。
- 把 y^2 展开成 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$：交叉项 $-2/\sqrt{x(x+1)}$ 正是第一部分的用意所在。
- 在体积公式中漏掉因子 π，或者把 π 写成 2π。

STEP 之外

答案 $2\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$ 其实就是 $2\,\mathrm{arsinh}\,\sqrt{x}$，因为 $\mathrm{arsinh}\,u = \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right)$。用代换 $x = \sinh^2\theta$，一行就可得到同样的结果。选取能把平方根有理化（rationalise）的代换，是一套有系统的技巧（欧拉代换，Euler substitutions），而它背后支撑着这样一个结果：凡是 x 与 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的有理函数（rational function），其积分都可以用初等函数（elementary functions）表示。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 中还有很多同类的积分。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。