详细解答

STEP I 2010，第 3 题

纯数学 · 和化积公式

> **STEP I 2010，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q3

关键思路

和差化积公式（sum-to-product formulae）的作用，正是把两个正弦（或余弦）之差化为乘积。椭圆（ellipse）上连接参数（parameter）为 u 和 v 的两点的弦（chord），其斜率（gradient）为 $\dfrac{b(\sin v - \sin u)}{a(\cos v - \cos u)}$。分子和分母都是差，所以可用这些公式把它们因式分解，约去公因式之后，斜率只取决于和 $u+v$。于是比较两条弦，就归结为比较两个余切（cotangent）。

解答

三角恒等式

利用复角公式（compound-angle formulae），

$$\begin{aligned}\sin(x+y) - \sin(x-y) &= (\sin x \cos y + \cos x \sin y) - (\sin x \cos y - \cos x \sin y) \\ &= 2\cos x \sin y,\end{aligned}$$

正如所求。现在，对任意 A 和 B，设 $x = \frac{1}{2}(A+B)$ 及 $y = \frac{1}{2}(A-B)$，则 $x+y = A$ 及 $x-y = B$。这个恒等式（identity）变成

$$\sin A - \sin B = 2\cos \tfrac{1}{2}(A+B)\ \sin \tfrac{1}{2}(A-B).$$

同样地，

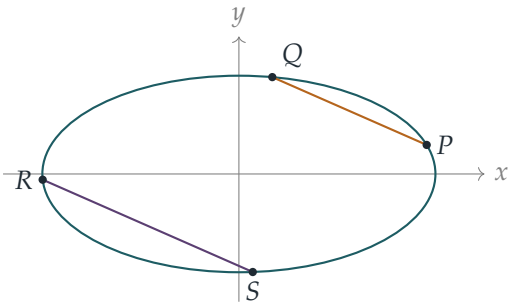
$$\begin{aligned}\cos(x+y) - \cos(x-y) &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) - (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\ &= -2\sin x \sin y,\end{aligned}$$

再作相同的代换，便得

$$\cos A - \cos B = -2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\,\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

平行弦

四点全都位于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上，按逆时针方向依次为 P、Q、R、S。下图显示 $a=2$、$b=1$ 时的一对平行弦。



弦的斜率。在 $[0,2\pi)$ 内取两个参数 $u<v$，使得通过 $(a\cos u, b\sin u)$ 和 $(a\cos v, b\sin v)$ 的弦不是垂直的，即 $\cos v \neq \cos u$。在两个恒等式中取 $A=v$、$B=u$，可知其斜率为

$$\frac{b(\sin v-\sin u)}{a(\cos v-\cos u)} = \frac{2b\cos\tfrac{1}{2}(u+v)\,\sin\tfrac{1}{2}(v-u)}{-2a\sin\tfrac{1}{2}(u+v)\,\sin\tfrac{1}{2}(v-u)} = -\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u+v).$$

这样约分是合理的：$0<v-u<2\pi$，所以 $\frac{1}{2}(v-u)$ 严格介乎 0 与 π 之间，故 $\sin\frac{1}{2}(v-u)\neq 0$。由于原来的分母不等于零，$\sin\frac{1}{2}(u+v)\neq 0$ 亦成立，所以余切有定义。

记 $\alpha=\frac{1}{2}(p+q)$ 及 $\beta=\frac{1}{2}(r+s)$。PQ 和 SR 都不是垂直的，所以

$$\text{斜率：}\ PQ=-\frac{b}{a}\cot\alpha, \qquad \text{斜率：}\ SR=-\frac{b}{a}\cot\beta,$$

其中 $\sin\alpha\neq 0$ 及 $\sin\beta\neq 0$。两条非垂直的直线平行，当且仅当它们的斜率相等；又因为 $b/a\neq 0$，

$$PQ \parallel SR \iff \cot\alpha=\cot\beta.$$

? **想一想** 为甚么不能直接“约去 cot”而得出 $\alpha=\beta$?

因为 cot 并非一对一（one-to-one）：它以 π 为周期（period）重复取值。为了顾及这一点，把两者之差写成单一个正弦：

$$\cot\alpha-\cot\beta=\frac{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

分母不等于零，所以

$$PQ \parallel SR \iff \sin(\beta-\alpha)=0 \iff \beta-\alpha=k\pi\text{，对于某整数}k.$$

确定 k 的值。我们有

$$\beta-\alpha=\tfrac{1}{2}[(r-p)+(s-q)].$$

由于 $p<r$ 及 $q<s$，两个括号内的值都是正数，所以 $\beta-\alpha>0$。由于四个参数都在 $[0,2\pi)$ 内，每个括号内的值都小于 2π，所以 $\beta-\alpha<2\pi$。严格介乎 0 与 2π 之间的 π 的倍数只有 π 本身，所以 $k=1$。因此

$$PQ \parallel SR \iff \tfrac{1}{2}(r+s-p-q)=\pi \iff r+s-p-q=2\pi.$$

每一步都是等价关系，所以两个方向都已证明，正如所求。

（这两条直线不可能重合：一条直线与椭圆最多相交于两点，而 P、Q、R、S 是四个相异的点。所以这里的“平行”是指真正平行而且互不重合。）

验算

- 取 $p=0$、$q=\frac{\pi}{2}$、$r=\pi$、$s=\frac{3\pi}{2}$，则 $r+s-p-q=2\pi$。此时 $P=(a,0)$、$Q=(0,b)$、$R=(-a,0)$、$S=(0,-b)$，而 PQ 和 SR 的斜率都是 $-b/a$。当 $a=2$、$b=1$ 时，两个斜率都等于 -0.5。
- 对称性：条件即是 $\frac{1}{2}(r+s)=\frac{1}{2}(p+q)+\pi$。变换 $(x,y)\mapsto(-x,-y)$ 会令点的参数增加 π，而把弦 PQ 旋转半周会得出一条平行的弦，与结果吻合。
- 数值检验：随机选取 a,b 以及 $p<q<r<s$，在 $r+s-p-q=2\pi$ 的情况下（约 5000 个特意构造的例子），两个斜率完全相等，其他情况下则从不相等。

常见错误

- 由 $\cot\alpha=\cot\beta$ 直接推出 $\alpha=\beta$。这样会得到 $r+s=p+q$，在这里是不可能的。cot 的周期正是整题的关键。
- 忘记说明为何可以约去 $\sin\frac{1}{2}(v-u)$，或者没有利用 $p<q<r<s$ 这个次序来排除 $k=0$ 和 $k=2$。

STEP 之外

把椭圆写成 $(a\cos t, b\sin t)$，可见它是单位圆（unit circle）在伸缩变换（stretch）$(x,y)\mapsto(ax,by)$ 之下的像。这类线性映射（linear map）把平行线变为平行线，所以这道题其实

是关于圆的问题。在圆上，由角 p 到角 q 的弦垂直于角 $\frac{1}{2}(p+q)$ 处的半径，于是结果几乎一目了然。这种利用映射下保持不变的性质来简化问题的想法，贯穿线性代数和几何。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）是认识线性映射如何运作的好去处。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题）则有更多 STEP 风格的三角恒等式练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。