详细解答

STEP I 2010，第 2 题

纯数学 · 曲线描绘

STEP I 2010，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s1-q2

关键思路

用商法则（quotient rule）求导，并抽出永不为零的因子 e^x。这样驻点（stationary point）就是一个二次式的根，所以“有两个驻点”其实是关于其判别式（discriminant）的一个条件。至于绘画略图，同一个二次式的正负号告诉我们曲线在哪里上升、在哪里下降，而曲线在渐近线（asymptote）附近以及当 $x \to \pm\infty$ 时的表现，则补足其余的细节。

解答

设 $y = \dfrac{x-a}{x-b}\mathrm{e}^x$，其定义域为 $x \neq b$。利用积法则（product rule），并由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right) = \dfrac{(x-b)-(x-a)}{(x-b)^2} = \dfrac{a-b}{(x-b)^2}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-a}{x-b}\mathrm{e}^x + \frac{a-b}{(x-b)^2}\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x[(x-a)(x-b)+(a-b)]}{(x-b)^2}.$$

由于 $\mathrm{e}^x > 0$，而且当 $x \neq b$ 时 $(x-b)^2 > 0$，所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的正负号与下式的正负号相同：

$$q(x) = (x-a)(x-b) + (a-b) = x^2 - (a+b)x + ab + a - b,$$

而驻点正好就是 q 的根当中不等于 $x = b$ 的那些。

? **想一想** q 的根会否刚好落在 $x = b$，即曲线没有定义的地方？

这并不会造成问题：$q(b) = a - b$，所以只有当 $a = b$ 时 $x = b$ 才是根。但这时曲线只不过是 $y = \mathrm{e}^x$（在 $x = b$ 处有一个空洞），根本没有驻点。因此在任何情况下，驻点都恰好

是 q 的实根，而驻点有两个，当且仅当 q 有两个相异实根，即其判别式为正：

$$(a+b)^2 - 4(ab+a-b) = (a-b)^2 - 4(a-b) = (a-b)(a-b-4) > 0.$$

两个因子之积为正，当且仅当两者皆正或两者皆负。两者皆负即 $a-b<0$；两者皆正即 $a-b>4$（这已保证 $a-b>0$）。因此，若有两个驻点，必须有

$$a-b<0 \quad \text{或} \quad a-b>4,$$

这正是所要证明的。（反过来说，两个条件中任何一个成立，都会有两个驻点。）

第 (i) 部分

取 $a=0$、$b=\frac{1}{2}$，则 $a-b=-\frac{1}{2}<0$，并且

$$y=\frac{x\,\mathrm{e}^x}{x-\frac{1}{2}}, \qquad q(x)=x^2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}=(x-1)(x+\tfrac{1}{2}).$$

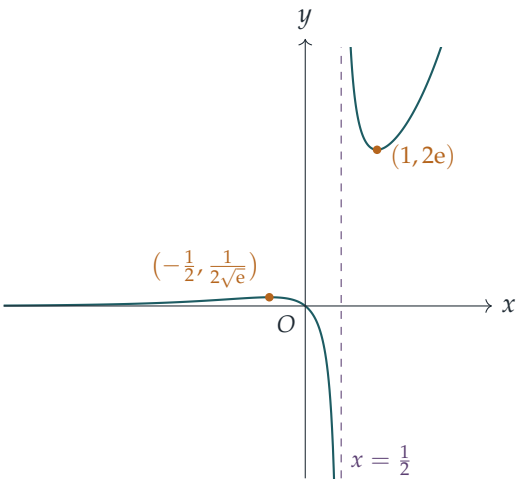
驻点位于 $x=-\frac{1}{2}$ 和 $x=1$，分别在铅垂渐近线 $x=\frac{1}{2}$ 的两侧，符合题目要求。它们的 y-值为

$$y(-\tfrac{1}{2})=\frac{-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}}{-1}=\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\approx 0.30, \qquad y(1)=\frac{\mathrm{e}}{\frac{1}{2}}=2\mathrm{e}\approx 5.44.$$

由于当 $x<-\frac{1}{2}$ 时 $q>0$，当 $-\frac{1}{2}<x<1$（其中 $x\neq\frac{1}{2}$）时 $q<0$，而当 $x>1$ 时 $q>0$，所以点 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}})$ 是局部极大点（local maximum），而 $(1,2\mathrm{e})$ 是局部极小点（local minimum）。

其他特征：

- 当 $x\to-\infty$ 时，$\frac{x}{x-1/2}\to 1$ 而 $\mathrm{e}^x\to 0$，所以 $y\to 0$。当 $x<0$ 时，x 和 $x-\frac{1}{2}$ 皆为负数，所以 $y>0$：曲线从上方趋近负 x-轴。
- 曲线只在原点与坐标轴相交，而且当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时 $y<0$。
- 当 $x\to\frac{1}{2}^-$ 时，$y\to-\infty$；当 $x\to\frac{1}{2}^+$ 时，$y\to+\infty$（分子趋向 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1/2}>0$）。
- 当 $x\to\infty$ 时，$y\to\infty$，增长的速度与 e^x 相若。



第 (ii) 部分

取 $a=\frac{9}{2}$、$b=0$，则 $a-b=\frac{9}{2}>4$，所以同样有两个驻点。这时

$$y=\frac{x-\frac{9}{2}}{x}\,\mathrm{e}^x, \qquad q(x)=x^2-\tfrac{9}{2}x+\tfrac{9}{2}=\tfrac{1}{2}(2x-3)(x-3),$$

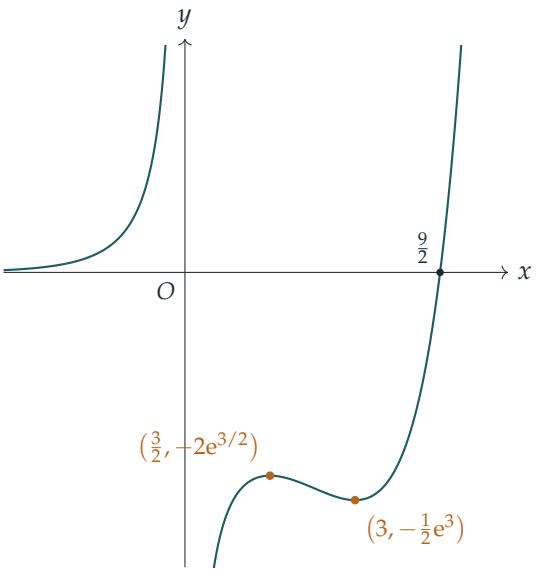
所以驻点位于 $x=\frac{3}{2}$ 和 $x=3$，两者都在渐近线 $x=0$ 的右方。它们的 y-值为

$$y\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{-3}{\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{3/2}=-2\mathrm{e}^{3/2}\approx -8.96, \qquad y(3)=\frac{-\frac{3}{2}}{3}\,\mathrm{e}^3=-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^3\approx -10.04.$$

q 的正负号如下：当 $x<\frac{3}{2}$（$x\neq 0$）时为正，在 $\left(\frac{3}{2},3\right)$ 上为负，当 $x>3$ 时为正，所以 $\left(\frac{3}{2},-2\mathrm{e}^{3/2}\right)$ 是局部极大点，而 $\left(3,-\frac{1}{2}\mathrm{e}^3\right)$ 是局部极小点。留意两点都位于 x-轴下方，而且极小点只比极大点略低，所以两点之间的凹陷很浅。

其他特征：

- 当 $x\to-\infty$ 时，$y\to 0$；当 $x<0$ 时，$x-\frac{9}{2}$ 和 x 皆为负数，所以 $y>0$。在 $x<0$ 上曲线递增（因为该处 $q>0$），由刚好高于横轴之处一直向上升往渐近线。
- 当 $x\to 0^-$ 时，$y\to+\infty$；当 $x\to 0^+$ 时，$y\to-\infty$（分子趋向 $-\frac{9}{2}$）。
- 唯一的截点（intercept）是 $\left(\frac{9}{2},0\right)$；在 $\left(0,\frac{9}{2}\right)$ 上 $y<0$，而当 $x>\frac{9}{2}$ 时 $y>0$，并且当 $x\to\infty$ 时 $y\to\infty$。



这里 y-轴本身就是铅垂渐近线。

验算

- 在随机选取的 (a,b,x) 上以数值方法计算 y 的导数，结果与 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的公式吻合；对随机选取的 (a,b) 数算 q 变号的次数，亦发现恰好在 $a-b<0$ 或 $a-b>4$ 时才有两个驻点。
- 在 (i) 中，$y(1)=5.4366=2\mathrm{e}$ 及 $y(-\frac{1}{2})=0.3033$；在 (ii) 中，$y(\frac{3}{2})=-8.9634$ 及 $y(3)=-10.0428$，而各点左右两旁邻近的函数值亦确认了它们是极大点还是极小点。
- 检查条件是否合理：在 (i) 中 $a-b=-\frac{1}{2}$，在 (ii) 中 $a-b=\frac{9}{2}$，两者都在容许的范围之内，理应如此。

常见错误

- 把判别式展开后，没有察觉它就是 $(a-b)^2-4(a-b)$；只要以 $a-b$ 来表示，它便可以简洁地因式分解。
- 忘记检查 q 的根不可能落在渐近线 $x=b$ 上。
- 在 (ii) 中，把极大点和极小点画在 x-轴的上下两侧：其实两者都在轴的下方，而曲线只在 $x=\frac{9}{2}$ 处穿过该轴。

STEP 之外

这里所用的方法，即根据导数的正负号和各个极限来判断曲线的形状，在大学第一门分析（analysis）课程中会得到严格的论证：一方面借着中值定理（Mean Value Theorem）（在某区间上导数为正，确实意味着函数递增），另一方面借着无穷远处极限的严谨定义。当 $x \to \pm\infty$ 时，e^x 胜过任何有理函数（rational function），这也是在该课程中证明的一个标准结果。Abbott 的 *Understanding Analysis* 把这一切都讲解得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。