详细解答

STEP I 2010，第 13 题

概率与统计 · 泊松过程的等候时间

STEP I 2010，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s1-q13

关键思路

“第一则短讯在第 1 至第 2 小时之间收到”等同于“第一个小时内没有短讯，但并非头两个小时内都没有短讯”。两者各自都是泊松分布（Poisson distribution）中零个事件的概率，也就是单独一个指数式。之后代入 $x = \mathrm{e}^{\lambda}$，一切便化为一条二次方程，余下的工作交给韦达定理（Vieta's formulas，即根之和与根之积）便可完成，Mildred 的部分也是如此。

解答

我们采用惯常的泊松模型：George 在任何长度为 t 小时的时段内收到的短讯数目服从平均值为 λt 的泊松分布，而互不重叠的时段内的数目互相独立（independent）。时间由早上开始时起计。由于时间是连续的，第一则短讯刚好在第 1 小时或刚好在第 2 小时收到的概率为零，所以端点包括与否并无影响。

George 的方程

设 T 为 George 收到第一则短讯前所经过的时间（以小时计）。那么 $T > t$ 当且仅当 $[0, t]$ 内没有短讯，所以

$$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}(\text{Poisson}(\lambda t) = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

事件 $\{1 < T \leq 2\}$ 就是从 $\{T > 1\}$ 中剔除 $\{T > 2\}$，而 $\{T > 2\} \subseteq \{T > 1\}$，所以

$$p = \mathrm{P}(1 < T \leq 2) = \mathrm{P}(T > 1) - \mathrm{P}(T > 2) = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}.$$

全式乘以 $\mathrm{e}^{2\lambda}$，得 $p\mathrm{e}^{2\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda} - 1$，即

$$p\mathrm{e}^{2\lambda} - \mathrm{e}^{\lambda} + 1 = 0,$$

正是所求。

λ 的两个正值

设 $x = \mathrm{e}^{\lambda}$。由于 $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{\lambda}$ 是由 $(0,\infty)$ 到 $(1,\infty)$ 的严格递增双射（bijection），λ 的正数解恰好对应于下式中满足 $x > 1$ 的解：

$$px^2 - x + 1 = 0.$$

这里 $p > 0$（它是某事件的概率，而该事件在例如 $[1,2]$ 内刚好收到一则短讯、之前一则也没有的情况下必定发生），所以这确实是一条二次方程。

> **想一想** 要证明两根为实数并不困难。但我们怎样知道两根都大于 1?

*相异实根。*判别式（discriminant）为 $1 - 4p > 0$，因为 $4p < 1$，所以方程有两个相异实根 $x_1 < x_2$。

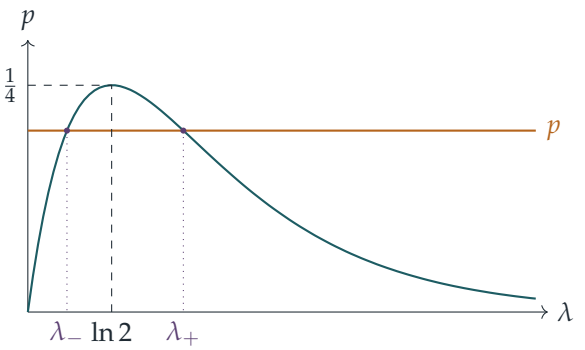
*两根均大于 1。*根据韦达定理，$x_1 + x_2 = \frac{1}{p}$ 及 $x_1 x_2 = \frac{1}{p}$。于是

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p} + 1 = 1 > 0,$$

所以 $x_1 - 1$ 与 $x_2 - 1$ 同号。两者之和为 $x_1 + x_2 - 2 = \frac{1}{p} - 2 > 0$，因为由 $p < \frac{1}{4}$ 可得 $\frac{1}{p} > 4$。因此两者皆为正数：$x_1 > 1$ 及 $x_2 > 1$。

故此 $\lambda_{\pm} = \ln\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2p}\right)$ 是满足该方程的两个相异的 λ 正值。

看看图像便明白个中道理。把 $p = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}$ 视为 λ 的函数，它在 $\lambda = 0$ 时为 0，当 $\lambda \to \infty$ 时趋向 0，并且（设 $u = \mathrm{e}^{-\lambda}$，则 $p = u - u^2$）在 $u = \frac{1}{2}$，即 $\lambda = \ln 2$ 时取得极大值 $\frac{1}{4}$。高度为 $p < \frac{1}{4}$ 的水平线与曲线相交两次：一部冷清的电话（根本很少收到短讯）和一部繁忙的电话（短讯通常在第一个小时内便收到）可以给出相同的 p。



Mildred：$\lambda_1+\lambda_2$

每部电话单独来看，都与 George 的情况完全相同，所以 e^{λ_1} 和 e^{λ_2} 都满足 $px^2-x+1=0$。这条二次方程只有两个根，而 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 e^{λ_1} 和 e^{λ_2} 就是它的两个根 x_1 和 x_2。（这需要 $p<\frac{1}{4}$，而此条件成立，因为存在两个相异的值：当 $p=\frac{1}{4}$ 时方程有重根。）由根之积，

$$e^{\lambda_1+\lambda_2}=e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}=x_1x_2=\frac{1}{p},\qquad \text{所以}\qquad \lambda_1+\lambda_2=\ln\frac{1}{p}=-\ln p.$$

Mildred 的第一则短讯

想一想 Mildred 两部电话合共收到的短讯总数服从甚么分布？

两个数目是独立的泊松变量，所以它们之和服从泊松分布，其平均值为两个平均值之和：在 t 小时内，她合共收到 $\text{Poisson}((\lambda_1+\lambda_2)t)$ 则短讯。换一个说法，设 T_1,T_2 为两部电话各自的等候时间；它们互相独立，而她的第一则短讯在 $T=\min(T_1,T_2)$ 时收到，且

$$\text{P}(T>t)=\text{P}(T_1>t)\,\text{P}(T_2>t)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

无论用哪一种方法，设 $\mu=\lambda_1+\lambda_2$，则 $e^{-\mu}=p$，再沿用处理 George 时的同一论证，可得

$$\text{P}(1<T\leq 2)=e^{-\mu}-e^{-2\mu}=p-p^2=p(1-p).$$

验算

- 取 $\lambda=0.8$，$p=e^{-0.8}-e^{-1.6}\approx 0.2474$；模拟 2×10^5 个指数分布（exponential distribution）的等候时间，所得结果为 0.2462。
- 取 $p=0.2$：两根为 $\lambda_1\approx 0.3235$ 和 $\lambda_2\approx 1.2859$，两者皆为正数，其和为 $1.6094=\ln 5=-\ln 0.2$。模拟 $\min(T_1,T_2)$ 所得的最后一个概率为 0.1601，而 $p-p^2=0.16$。
- 合理性检查：$p(1-p)<p$，理应如此，因为有两部电话时，第一则短讯往往较早收到，令“一小时内没有短讯”的可能性降低。

常见错误

- 证明了 x 的两根是正实数，却忘记 $\lambda>0$ 需要 $x>1$，而不仅是 $x>0$。
- 在最后一部分把两部电话的概率相加，或把它们相乘（p^2）。正确的事件是“任何一部电话收到的第一则短讯”，由合并后的速率决定。

STEP 之外

泊松过程（Poisson process）中第一个事件出现前的等候时间服从指数分布，而本题用到的合并性质（速率分别为 λ_1、λ_2 的独立泊松过程合并成一个速率为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程）是泊松过程的基本性质之一，与之并列的还有“稀疏化”（thinning，即每个事件各自独立地以概率 q 保留）。这些想法是排队论（queueing theory）以及应用概率中许多内容的基础。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入门教材）对泊松过程的处理方式，正好自然地承接本题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。