详细解答

STEP I 2010，第 11 题

力学 • 圆上的碰撞

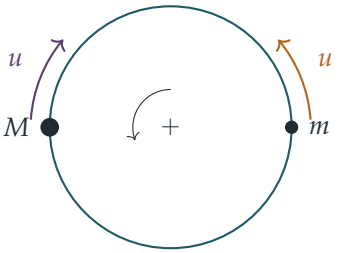
> **STEP I 2010，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q11

关键思路

虽然两个质点（particle）在圆上运动，但每次碰撞（collision）其实都是沿公切线方向的普通一维碰撞：光滑凹槽只会在垂直于运动的方向施力，所以它既不能改变速率，也不会影响切向的冲量（impulse）。因此我们采用动量守恒（conservation of momentum）和牛顿实验定律（Newton's experimental law），并以沿圆周量度的*带符号*速度来列式。此后，两个事实已包含全部信息：带符号的总动量永远不变，而每次碰撞都令相对速率乘以 e。

解答

我们把两个质点看成光滑水平凹槽内的点。取逆时针方向为正，设 m 最初以 u 逆时针运动，M 以 u 顺时针运动，所以它们的带符号速度分别是 u 和 $-u$。



在两次碰撞之间，每个质点所受的唯一水平力就是光滑凹槽的法向反作用力（normal reaction），它垂直于速度。这个力不作功，所以每个质点的速率保持不变。碰撞时，两个质点互相施加的冲量沿公切线方向，大小相等、方向相反，而凹槽并不提供任何切向冲量。因此每次碰撞中，沿圆周的带符号总动量不变，而牛顿定律亦适用于带符号速度。

第一次碰撞

设第一次碰撞后的带符号速度为 p（对于 m）和 q（对于 M）。由动量守恒和牛顿定律得

$$mp + Mq = mu - Mu,$$
$$q - p = e\big(u - (-u)\big) = 2eu.$$

把 $q = p + 2eu$ 代入第一条方程，得 $(m+M)p = (m-M)u - 2eMu$，所以

$$p = -\frac{u\,(M - m + 2eM)}{M+m}, \qquad q = p + 2eu = \frac{u\,\big(2em - (M-m)\big)}{M+m}.$$

因此第一次碰撞后，两个质点的速率分别为

$$\text{质点}m = \frac{u\,(M - m + 2eM)}{M+m}, \qquad \text{质点}M = \frac{u\,|2em - (M-m)|}{M+m}.$$

想一想 哪些正负号表示质点改变了方向?

质点 m 原本沿正方向运动，所以它恰好在 $p < 0$ 时反向。由于 $M > m$ 且 $e \geq 0$，括号内的 $M - m + 2eM$ 是正数，所以 m 必定反向。质点 M 原本沿负方向运动，所以它恰好在 $q > 0$ 时反向，即当

$$2em > M - m.$$

所以在这个条件下，两个质点都改变方向，正如题目所要求。

再经过 $2n$ 次碰撞之后

为何 $mv - MV = u(M-m)$。开始时，带符号的总动量是 $mu - Mu = -u(M-m)$。碰撞令它守恒，而在两次碰撞之间速率不变，所以它永远保持这个值。

由于两个质点在每次碰撞时都反向，第一次碰撞后 m 顺时针运动而 M 逆时针运动；其后每次碰撞都把这个情况对调。再经过 $2n$ 次碰撞之后，总共发生了 $2n+1$ 次碰撞，是奇数次，所以 m 又是顺时针运动，M 又是逆时针运动。它们的带符号速度是 $-v$ 和 V，而

$$m(-v) + MV = -u(M-m) \quad \Longrightarrow \quad mv - MV = u(M-m).$$

相对速率。每次碰撞后，两个质点以恒定速率沿圆周向相反方向分开，然后在圆的另一边再次相遇，而互相接近时的相对速率与分开时相同。牛顿定律指出，碰撞后的分离速率等于碰撞前接近速率的 e 倍。最初的接近速率是 $2u$，所以经过 $2n+1$ 次碰撞后，分离速率是 $2ue^{2n+1}$。由于两个质点向相反方向运动，这个分离速率就是 $v + V$：

$$v + V = 2ue^{2n+1}.$$

求解。把第二条方程乘以 M，再与第一条相加：

$$(m+M)v = u(M-m) + 2Mue^{2n+1},$$

又把第二条方程乘以 m，再减去第一条：

$$(m+M)V = 2mue^{2n+1} - u(M-m).$$

因此

$$v = \frac{u\left(M-m+2Me^{2n+1}\right)}{M+m}, \qquad V = \frac{u\left(2me^{2n+1}-(M-m)\right)}{M+m}.$$

验算

- 代入 $n=0$，便得回上面求得的第一次碰撞后的速率。
- 取 $m=2$、$M=3$、$e=0.8$、$u=1$，公式在 $n=0$ 时给出 $(v,V)=(1.16,\,0.44)$，在 $n=1$ 时给出 $(0.8144,\,0.2096)$。逐步模拟两个质点绕圆运动并碰撞的过程，在第 1 次和第 3 次碰撞后得到的正是这些数值。
- 动能（kinetic energy）不应增加。当 $e=1$ 时，$v = u\,\frac{3M-m}{M+m}$ 而 $V = u\,\frac{3m-M}{M+m}$，你可以验证 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(m+M)u^2$。

常见错误

- 混淆速率与速度：牛顿定律和动量守恒都必须以带符号速度来写。到最后才转换为速率。
- 忘记“再经过 $2n$ 次碰撞”即总共 $2n+1$ 次，所以幂次是 e^{2n+1} 而不是 e^{2n}。
- 为凹槽提供的向心力（centripetal force）而担心。它垂直于运动方向，所以既不改变速率，也不会出现在碰撞方程之中。

STEP 之外

V 的公式显示，当 $e<1$ 时，题目给定的假设不可能永远成立：一旦 $2me^{2n+1}$ 跌至低于 $M-m$，较重的质点便不再反向。这里的动量只是在旋转的意义下守恒。凹槽的力总是指向通过圆心的方向，所以真正守恒的量是关于圆心的*角动量*（angular momentum），而圆的半径刚好约去。这类源自对称性的守恒定律，是大学一年级力学的核心主题；Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）对角动量和碰撞有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。