详细解答

STEP I 2010，第 10 题

力学 · 向量运动学

> **STEP I 2010，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q10

关键思路

一切都源自对 $\mathbf{r}$ 求导再取点积(dot product)：两个向量之间的夹角可由 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ 求得，而垂直 (perpendicular) 即表示点积为零。至于第二个质点，关键的观察是：Q 在时刻 t 的位置，正是 P 在时刻 $t-T$ 的位置。把位置写成复数 (complex number) $z = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$，最后一部分便化为一行计算。

解答

速度与加速度

记 $\mathbf{r} = \mathrm{e}^t(\cos t,\ \sin t)$。由乘积法则（product rule），

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t,\ \sin t + \cos t),\\ \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \mathrm{e}^t((\cos t - \sin t) + (-\sin t - \cos t),\ (\sin t + \cos t) + (\cos t - \sin t))\\ &= \mathrm{e}^t(-2\sin t,\ 2\cos t).\end{aligned}$$

速度与位移之间的夹角

两者的大小分别为 $|\mathbf{r}| = \mathrm{e}^t$ 及

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathrm{e}^{2t}[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2] = \mathrm{e}^{2t}\cdot 2,$$

因为交叉项 $\mp 2\sin t\cos t$ 互相抵消。所以 $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t$。点积为

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = \mathrm{e}^{2t}[\cos t(\cos t - \sin t) + \sin t(\sin t + \cos t)] = \mathrm{e}^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = \mathrm{e}^{2t}.$$

因此，若 θ 为 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{v}$ 之间的夹角，则

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{r}||\mathbf{v}|} = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以对任何 t 都有 $\theta = \frac{\pi}{4}$，正如题目所求。（由于 $\mathrm{e}^t > 0$，两个向量都永不为零，所以夹角恒有定义。）

加速度与位移垂直

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = \mathrm{e}^{2t}[-2\sin t\cos t + 2\sin t\cos t] = 0,$$

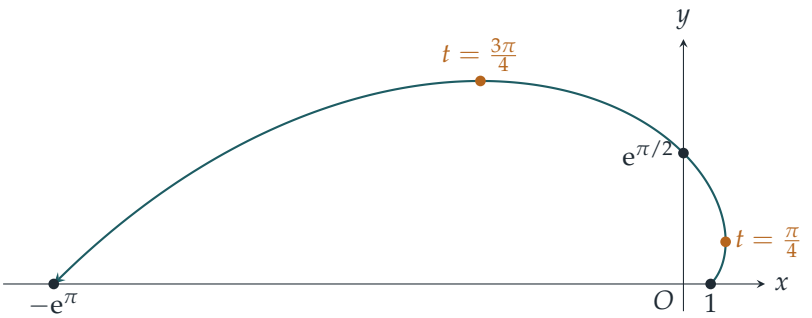
而且两个向量均非零，所以 $\mathbf{a}$ 恒与 $\mathbf{r}$ 垂直。还可留意，$\mathbf{a} = 2\mathrm{e}^t(-\sin t, \cos t)$ 正是把 $\mathbf{r}$ 旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后再放大至两倍。

$0 \le t \le \pi$ 时的路径

在极坐标（polar coordinates）中，路径为 $r = \mathrm{e}^\theta$，其中 $\theta = t$：质点沿逆时针方向转动时，与 O 的距离按指数增长，这是一条等角螺线（equiangular spiral），又称对数螺线（logarithmic spiral）。几个有用的参考点：

- $t = 0$：位于点 $(1, 0)$，沿方向 $(1, 1)$ 运动，与 x 轴成 $\frac{\pi}{4}$ 角。
- $t = \frac{\pi}{4}$：$\dot{x} = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t) = 0$，所以 x 达到最大，位于点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\pi/4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\pi/4}\right) \approx (1.55, 1.55)$。
- $t = \frac{\pi}{2}$：位于点 $(0, \mathrm{e}^{\pi/2}) \approx (0, 4.81)$。
- $t = \frac{3\pi}{4}$：$\dot{y} = \mathrm{e}^t(\sin t + \cos t) = 0$，所以 y 达到最大，位于 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}\right) \approx (-7.46, 7.46)$。
- $t = \pi$：位于点 $(-\mathrm{e}^\pi, 0) \approx (-23.1, 0)$，以 $\frac{\pi}{4}$ 角穿过坐标轴，朝左下方前进。

在路径上每一点，路径都与由 O 出发的径向线成 $\frac{\pi}{4}$ 角，其形状由此确定。



第二个质点

想一想 Q 在时刻 t 位于何处？试以 P 的运动来表示。

Q 到达每一点的时间都比 P 迟 T，所以在时刻 t，它正处于 P 在时刻 $t-T$ 的位置：

$$\mathbf{r}_Q(t) = \mathbf{r}(t-T) = \mathrm{e}^{t-T}\big(\cos(t-T),\, \sin(t-T)\big).$$

于是

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |\mathbf{r}(t)|^2 + |\mathbf{r}(t-T)|^2 - 2\,\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t-T) \\ &= \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t-2T} - 2\mathrm{e}^{2t-T}\big(\cos t\cos(t-T) + \sin t\sin(t-T)\big) \\ &= \mathrm{e}^{2t}\big(1 - 2\mathrm{e}^{-T}\cos T + \mathrm{e}^{-2T}\big), \end{aligned}$$

其中用到 $\cos t\cos(t-T) + \sin t\sin(t-T) = \cos\big(t-(t-T)\big) = \cos T$。因此

$$|PQ| = k\,\mathrm{e}^{t}, \qquad k = \sqrt{1 - 2\mathrm{e}^{-T}\cos T + \mathrm{e}^{-2T}},$$

而 k 只取决于 T，与 t 无关。所以 P 与 Q 之间的距离与 e^t 成正比，正如题目所求。（括号内的式子等于 $|1-\mathrm{e}^{-T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}|^2$，当 $T\neq 0$ 时为正数，因为 $\mathrm{e}^{-T}\neq 1$；所以 $k>0$。）

*复数版本。*设 $z = x+\mathrm{i}y$，则 P 位于 $z_P = \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$，而 Q 位于 $z_Q = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})(t-T)}$。所以

$$z_P - z_Q = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\big(1-\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})T}\big), \qquad |z_P - z_Q| = \mathrm{e}^t\,\big|1-\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})T}\big|.$$

这亦显示 $\overrightarrow{QP}$ 是 z_P 的一个固定复数倍，所以线段 PQ 与 OP 的夹角保持不变：三角形 OQP 的形状始终如一，只是不断放大和转动。

验算

- 对 $z = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$ 求导，得 $\dot z = (1+\mathrm{i})z$ 及 $\ddot z = (1+\mathrm{i})^2 z = 2\mathrm{i}z$。乘以 $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ 相当于旋转 $\frac{\pi}{4}$，乘以 $2\mathrm{i}$ 则相当于旋转 $\frac{\pi}{2}$：最初的两个结果一目了然。
- 以数值验证：随机选取 $t, \mathbf{r}$ 与 $\mathbf{v}$ 之间的夹角算得 $0.785398\ldots = \frac{\pi}{4}$，且 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = 0$。取 $T=1$ 时，在所有测试过的 t 值上都有 $|PQ|/\mathrm{e}^t = 0.85895\ldots$，与 $\sqrt{1-2\mathrm{e}^{-1}\cos 1+\mathrm{e}^{-2}}$ 吻合。
- 当 $T\to 0$ 时，$k\approx T\sqrt{2}$，所以 $|PQ|\approx\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t T = |\mathbf{v}|T$，即在时间 T 内走过的距离，理应如此。

常见错误

- 把 Q 的位置当作 $\mathbf{r}(t+T)$：Q 在 P 的*后面*，所以它位于 $\mathbf{r}(t-T)$。（答案仍然与 e^t 成正比，但常数不同。）
- 把螺线画成顺时针方向转动，或者画成路径经过原点。质点与 O 的距离为 $\mathrm{e}^t \geq 1$，并随着质点沿逆时针方向运动而增加。

STEP 之外

曲线 $r = \mathrm{e}^\theta$ 就是对数螺线：以 O 为中心把它缩放，所得的曲线都是它本身旋转后的结果，这正是相交角保持不变、以及 OQP 形状不变的原因。在大学一年级的课程中，平面上的运动常以极坐标单位向量 $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ 来处理；在这套表示法下，本题的径向加速度 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ 等于零，直接得出垂直的结论。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）正是为这类问题而发展极坐标的方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。