详细解答

STEP I 2010，第 1 题

纯数学 · 配方法

STEP I 2010，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s1-q1

关键思路

这个恒等式（identity）把一个不易处理的二次式改写成两个平方之和再加一个常数。只要留意到第二条方程也可以用同样的两个括号 $x-y+2$ 和 $2x-y$ 来表示，问题就变成两个新未知数的两条简单方程。这两条方程对新未知数的平方而言是线性的，所以可以直接求解。

解答

恒等式

展开右边，

$$\begin{aligned} &a(x-y+2)^2+b(cx+y)^2+d \\ &\quad =a(x^2+y^2-2xy+4x-4y+4)+b(c^2x^2+2cxy+y^2)+d \\ &\quad =(a+bc^2)x^2+(a+b)y^2+(2bc-2a)xy+4ax-4ay+(4a+d). \end{aligned}$$

由于这是恒等式，我们可以与 $5x^2+2y^2-6xy+4x-4y$ 比较系数（comparing coefficients）：

$$\begin{aligned}
x:&\quad 4a=4, && \text{所以}a=1;\\
y:&\quad -4a=-4, && \text{与上式吻合;}\\
y^2:&\quad a+b=2, && \text{所以}b=1;\\
xy:&\quad 2bc-2a=-6, && \text{所以}2c=-4,\ c=-2;\\
x^2:&\quad a+bc^2=5, && \text{验算：}1+4=5;\\
\text{常数项}:&\quad 4a+d=0, && \text{所以}d=-4.
\end{aligned}$$

注意，单凭 x^2 的系数只能得出 $c^2=4$；决定正负号的是 xy 的系数。所以

$$a=1,\qquad b=1,\qquad c=-2,\qquad d=-4,$$

即

$$5x^2+2y^2-6xy+4x-4y\equiv(x-y+2)^2+(2x-y)^2-4,$$

其中我们把 $(-2x+y)^2$ 写成 $(2x-y)^2$。

联立方程

根据恒等式，第一条方程变成

$$(x-y+2)^2+(2x-y)^2=13.$$

想一想 第二条方程看来不一样。它可以用同样的两个括号来表示吗?

它含 x 和 y 的一次项是 $8x-8y$，是第一条方程的两倍。这提示我们试试 $2(x-y+2)^2$，它的一次项正好相符：

$$2(x-y+2)^2=2x^2+2y^2-4xy+8x-8y+8.$$

左边余下的部分是

$$6x^2+3y^2-8xy+8x-8y-2(x-y+2)^2=4x^2+y^2-4xy-8=(2x-y)^2-8.$$

所以第二条方程是 $2(x-y+2)^2+(2x-y)^2-8=14$，即

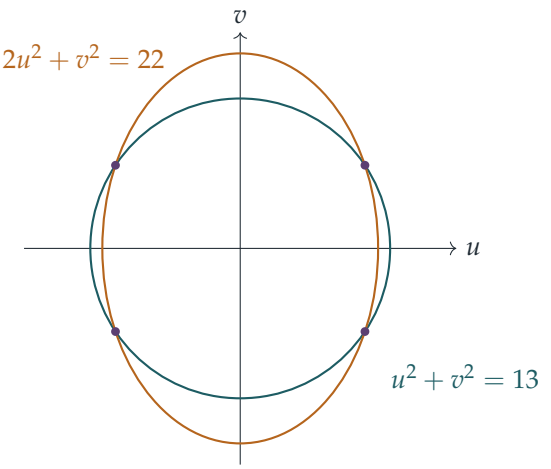
$$2(x-y+2)^2+(2x-y)^2=22.$$

（你也可以沿用求恒等式的方法，在 $\alpha(x-y+2)^2+\beta(\gamma x+y)^2+\delta$ 中比较系数而得出这个结果。）

现在设 $u = x - y + 2$ 及 $v = 2x - y$。方程组变成

$$u^2 + v^2 = 13, \qquad 2u^2 + v^2 = 22.$$

两式相减得 $u^2 = 9$，于是 $v^2 = 4$。所以 $u = \pm 3$ 及 $v = \pm 2$，两者的正负号可独立选取，共得四组 (u, v)。



要还原为 x 和 y，可以相减：$v - (u - 2) = (2x - y) - (x - y) = x$，所以

$$x = v - u + 2, \qquad y = 2x - v = v - 2u + 4.$$

每组 (u, v) 恰好对应一组 (x, y)，因为这个变量代换（change of variables）是线性而且可逆的。四个解如下：

u	v	x	y
3	2	1	0
3	-2	-3	-4
-3	2	7	12
-3	-2	3	8

所以

$$(x, y) = (1, 0), \quad (-3, -4), \quad (7, 12), \quad (3, 8).$$

验算

代入 $(1, 0)$：第一条方程得 $5 + 4 = 9$，第二条得 $6 + 8 = 14$。对于 $(7, 12)$：$245 + 288 - 504 + 28 - 48 = 9$ 及 $294 + 432 - 672 + 56 - 96 = 14$。电脑已在一千个随机有理点上验

证这两个恒等式，并确认四组解全部满足两条方程。以穷举法搜索所有满足 $|x|, |y| \leq 50$ 的整数对，找到的正好就是这四个解。两条圆锥曲线（conic）最多相交于四点，所以我们不可能有所遗漏。

常见错误

- 由 $c^2 = 4$ 直接取 $c = 2$，而没有核对 xy 的系数。
- 只取正平方根，结果只找到一个解而不是四个。
- 直接从原来的方程消去一个变量。这样会得出一条四次方程（quartic），用手计算非常费力。

STEP 之外

把二次型(quadratic form)写成平方的组合,是二次型理论的起点。把对称矩阵(symmetric matrix）对角化（diagonalise），总可以找到一个线性变量代换，把 $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ 化为 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$，而圆锥曲线正是这样分类的。这一题的两条方程碰巧共用同一对平方，所以才能如此干净俐落地分离开来。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）清楚讲解了对称矩阵和二次型。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。