详细解答

STEP III 2009，第 9 题

力学 • 抛体轨道的角度

STEP III 2009，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

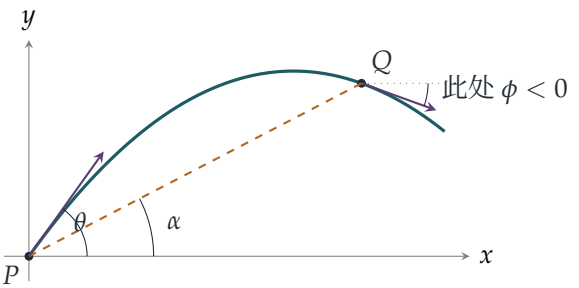
step.maths.org/questions/09-s3-q9

关键思路

在抛体运动（projectile motion）中，水平速度始终不变，而垂直速度则以恒定的变率改变。因此，由 P 到 Q 之间的平均垂直速度，就是它在两端的值的平均数，而弦（chord）PQ 的斜率（gradient）就是两端斜率的平均数。这样一行就得出第 (i) 部分。至于第 (ii) 部分，轨迹（trajectory）方程是 $\tan\theta$ 的二次方程（quadratic）（只要把 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ 代入），余下的工作交给根之和与根之积（sums and products of roots）便可。

解答

我们把质点（particle）视为在恒定重力 g 之下自由运动，不计空气阻力（air resistance）。取 P 为原点，x 轴沿水平正方向，y 轴垂直向上。设 u 为抛射速率，并设 $Q = (X, Y)$。我们假设 $X > 0$：Q 位于 P 的正方向一侧，所以水平速度 $u\cos\theta$ 为正，而所有角 $\theta, \phi, \theta', \phi'$ 都在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之内。（假如 Q 在 P 的正上方或正下方，在 P 和 Q 的角便都是 $\pm\frac{\pi}{2}$，题目就没有任何内容可言。）于是 $\tan\alpha = Y/X$。



第 (i) 部分

水平速度恒为 $u\cos\theta$。垂直速度在 P 是 $u\sin\theta$，在 Q 设为 v_Q，并且以恒定的变率 g 递减，所以它是时间的线性函数（linear function）。因此，若由 P 飞行到 Q 需时 T，则

$$X = (u\cos\theta)\,T, \qquad Y = \frac{u\sin\theta + v_Q}{2}\,T,$$

因为线性函数在一个区间上的平均值，就是它两个端点值的平均数。在每一点，运动方向就是速度的方向，所以 $\tan\theta = \dfrac{u\sin\theta}{u\cos\theta}$ 及 $\tan\phi = \dfrac{v_Q}{u\cos\theta}$。两式相除，得

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{1}{2}\left(\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta} + \frac{v_Q}{u\cos\theta}\right) = \tfrac{1}{2}(\tan\theta + \tan\phi),$$

即 $\tan\theta + \tan\phi = 2\tan\alpha$，正是所求。

第 (ii) 部分

二次方程。从 $x = ut\cos\theta$、$y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ 中消去 t，得轨迹

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\tan^2\theta).$$

记 $k = \dfrac{gX^2}{2u^2}$，它是正数。由于路径通过 (X,Y)，$T = \tan\theta$ 满足

$$kT^2 - XT + (Y+k) = 0.$$

第二条轨迹有相同的 u、X 和 Y，所以 $\tan\theta'$ 满足同一条方程。两条轨迹并不相同，所以 $\theta \neq \theta'$；又因为 tan 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是一对一（one-to-one）的，$\tan\theta$ 和 $\tan\theta'$ 就是那两个根。因此

$$\tan\theta + \tan\theta' = \frac{X}{k}, \qquad \tan\theta\tan\theta' = \frac{Y+k}{k} = 1 + \frac{Y}{k}.$$

第一个结果。由复角公式（compound-angle formula），

$$\tan(\theta+\theta') = \frac{\tan\theta + \tan\theta'}{1 - \tan\theta\tan\theta'} = \frac{X/k}{-Y/k} = -\frac{X}{Y} = -\cot\alpha.$$

这里需要 $Y \neq 0$。若 $Y = 0$（于是 $\alpha = 0$，而 $\cot\alpha$ 无定义），两根之积为 1，这表示 $\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$，也就是大家熟悉的情况：在水平地面上，射程相同的一对抛射角互为余角（complementary angles）。从这个意义上说，结果依然成立。

第二个结果。记 $t = \tan\alpha = Y/X$ 及 $s = \tan\theta + \tan\theta' = X/k$。于是 $Y/k = ts$，所以 $\tan\theta\tan\theta' = 1 + ts$。把第 (i) 部分分别应用于两条轨迹，得

$$\tan\phi = 2t - \tan\theta, \qquad \tan\phi' = 2t - \tan\theta'.$$

所以

$$\tan\phi+\tan\phi'=4t-s,$$
$$1-\tan\phi\tan\phi'=1-(4t^2-2ts+\tan\theta\tan\theta')=1-4t^2+2ts-1-ts=t(s-4t).$$

这两个量不可能同时为零：若 $\tan\phi'=-\tan\phi$，则 $\tan\phi\tan\phi'=-\tan^2\phi\le 0\neq 1$。当 $Y\neq 0$（于是 $t\neq 0$）且 $s\neq 4t$ 时，

$$\tan(\phi+\phi')=\frac{4t-s}{t(s-4t)}=-\frac{1}{t}=-\cot\alpha=\tan(\theta+\theta').$$

在其余情况下，要么 $1-\tan\phi\tan\phi'$ 和 $1-\tan\theta\tan\theta'$ 同时为零（$t=0$），要么 $\tan(\phi+\phi')$ 和 $\tan(\theta+\theta')$ 同为无穷大，所以在任何情况下，$\phi+\phi'$ 与 $\theta+\theta'$ 要么正切相同，要么同为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍。无论如何，

$$\theta+\theta'-(\phi+\phi')=n\pi\quad\text{对某个整数}n.$$

想一想 正切相等，只能把角确定到相差 π 的某个倍数。我们怎样知道这个倍数刚好是一个 π?

我们利用各角的大小。在每条轨迹上，斜率是 $\tan\theta-\dfrac{gx}{u^2\cos^2\theta}$，它随 x 增加而严格递减。由于 $X>0$，我们得到 $\tan\phi<\tan\theta$，所以 $\phi<\theta$；同理 $\phi'<\theta'$。四个角全都在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 之内，所以 $0<\theta-\phi<\pi$ 及 $0<\theta'-\phi'<\pi$。两式相加，

$$0<n\pi=(\theta+\theta')-(\phi+\phi')<2\pi,$$

所以 $n=1$，而 $\theta+\theta'=\pi+\phi+\phi'$，正是所求。

验算

- 取 $X=1$、$Y=\frac{1}{2}$ 及 $u^2=4g$，则 $k=\frac{1}{8}$。二次方程变成 $T^2-8T+5=0$，其根为 $4\pm\sqrt{11}$。于是 $\tan(\theta+\theta')=8/(1-5)=-2=-\cot\alpha$。以数值计算，$\theta+\theta'\approx 2.0344$ 而 $\pi+\phi+\phi'\approx 2.0344$，其中 $\tan\phi=1-\tan\theta$ 及 $\tan\phi'=1-\tan\theta'$。
- 水平地面（$Y=0$）：$\theta+\theta'=\frac{\pi}{2}$，而根据对称性，$\phi=-\theta$、$\phi'=-\theta'$。所以 $\pi+\phi+\phi'=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$，与预期相符。
- 我们以数值方法逐步模拟运动，确认了第 (i) 部分；又随机选取 20,000 组容许两条轨迹存在的 u、X 和 Y，检验了第 (ii) 部分的两个结果。

常见错误

- 单凭正切相等就断定 $\theta+\theta'=\pi+\phi+\phi'$。正切相等只能把角确定到相差 π 的某个倍数，你需要不等式 $\phi<\theta$ 和 $\phi'<\theta'$ 才能判定是哪一个倍数。

- 忘记说明为甚么 $\tan\theta$ 和 $\tan\theta'$ 是同一条二次方程的两个不同的根。它们不同，是因为两条轨迹不同，而 tan 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是一对一的。

STEP 之外

第 (ii) 部分可以从可逆性（reversibility）的角度作一个颇为有趣的解读。把任何一条路径倒过来走，就得到一个由 Q 到 P、以角 $\phi + \pi$ 抛出的抛体。所以这四个角是由两端之间的一种对称性联系起来的，而关系式 $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$ 正好把它表达出来。牛顿（Newton）定律（在没有摩擦力或阻力的情况下）的时间反演对称性（time-reversal symmetry），是贯穿整个大学力学的主题。若想看大学一年级程度、对抛体以至更多课题的透彻论述，可参阅 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学导论）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。